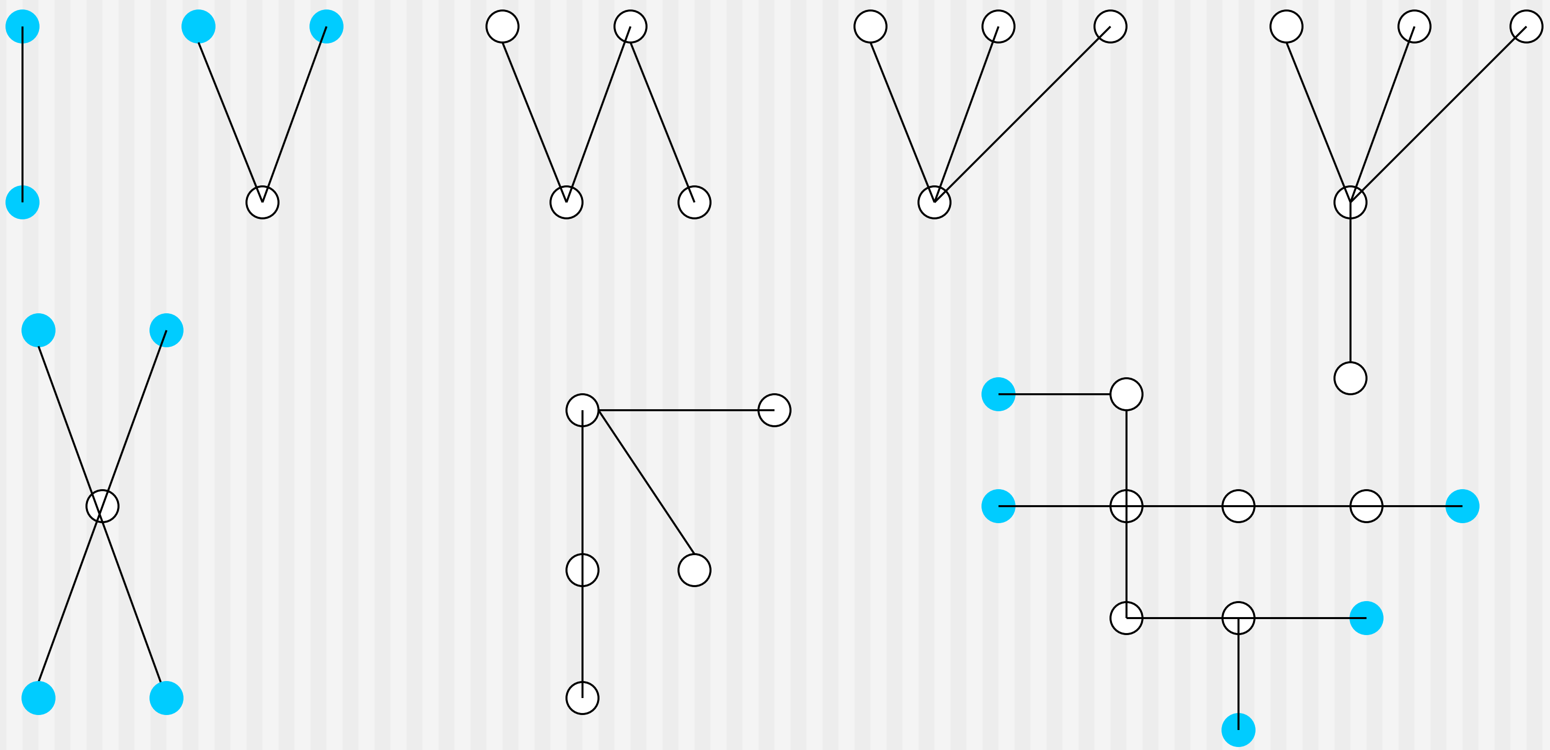
第9章 树

- **9.1 无向树的定义及性质**
- **9.2 生成树**
- 9.3 环路空间
- 9.4 断集空间
- **9.5 根树**

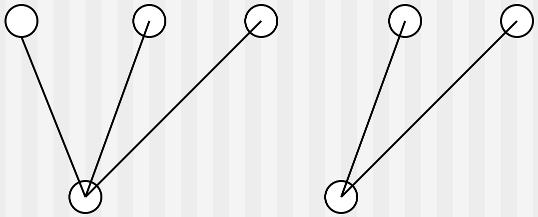
无向树(trees)

- 无向树: 连通(connected)无回路(acyclic)图



无向树

- 树(tree): 常用T表示树
- 森林(forest): 无向图至少有两个连通分支且每个连通分支都是树
- 平凡树: 平凡图(无树叶,无分支点)
- 树叶(leaf): 树中1度顶点,d(v)=1
- 分支点: 树中2度以上顶点,d(v)≥2



树的等价定义

- 定理1：设G=<V,E>是n阶m边无向图,则

  (1) G是树(连通无回)

$\Leftrightarrow$ (2) G中任何2顶点之间有唯一路径

$\Leftrightarrow$ (3) G无圈 $\wedge$ m=n-1

$\Leftrightarrow$ (4) G连通 $\wedge$ m=n-1

$\Leftrightarrow$ (5) G极小连通：连通 $\wedge$ 所有边是桥

$\Leftrightarrow$ (6) G极大无回：无圈 $\wedge$ 增加任何新边得唯一圈

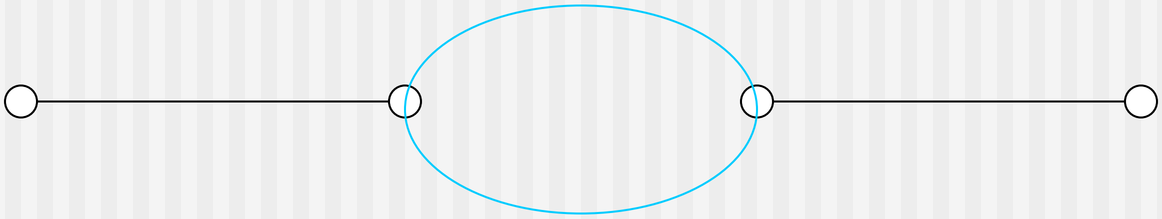
定理1(证明(1)⇒(2))

- 证明:

(1) G是树(连通无回)

(2) G中任何2顶点之间有唯一路径

(1)⇒(2): ∀u,v∈V, G连通, u,v之间的短程线是路径. 如果u,v之间的路径不唯一, 则G中有回路, 矛盾!



定理1(证明(2)⇒(3))

(2) G中任何2顶点之间有唯一路径

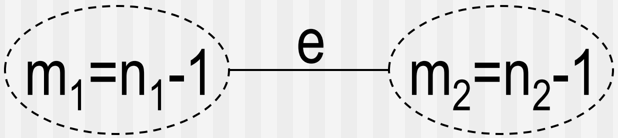
(3) G无圈 $\wedge$ m=n-1

- 证明(续): (2)⇒(3): 证明G中无圈(反证法): 若G中有v的环, 则v到v有长度为0和1的两条路径.若G中存在长度大于等于2的圈,则圈上任何两个不同顶点存在两条不同路径,与已知矛盾!

m=n-1(归纳法): n=1时,m=0. 设$n \le k$时成立,

当n=k+1时, 任选1边e, G-e有2个连通分支,

$m=m_1+m_2+1=(n_1-1)+(n_2-1)+1=n_1+n_2-1=n-1.$



定理1(证明(3)⇒(4))

(3) G无圈 ∧ $m=n-1$

(4) G连通 ∧ $m=n-1$

- 证明(续): 证明G连通用反证法: 假设G有s个连通分支, 则每个连通分支都是树, 所以

$m=m_1+m_2+\ldots+m_s=(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_s-1)$
$=n_1+n_2+\ldots+n_s-s=n-s=n-1$, 所以$s=1$.

$m_1=n_1-1$ $\qquad$ $m_2=n_2-1$ $\qquad \cdots\cdots \qquad$ $m_s=n_s-1$

定理1(证明(4)⇒(5))

(4) G连通 $\wedge$ m=n-1

(5) 连通 $\wedge$ 所有边是桥(G极小连通)

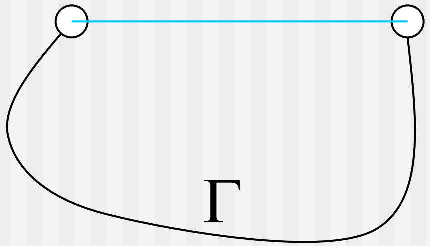
- 证明(续): 所有边是桥: $\forall e \in E$, G-e是n阶(n-2)边图, 一定不连通(定理7.9 连通⇒m≥n-1), 所以e是割边.

定理1(证明(5)⇒(6))

(5) G极小连通: 连通 ∧ 所有边是桥

(6) G极大无回: 无圈 ∧ 增加任何新边得唯一圈

- 证明(续): G中每条边均为桥,因而G中不可能含圈. ∀u,v∈V, G连通, u,v之间有唯一路径Γ, 则Γ∪(u,v)是唯一的圈.

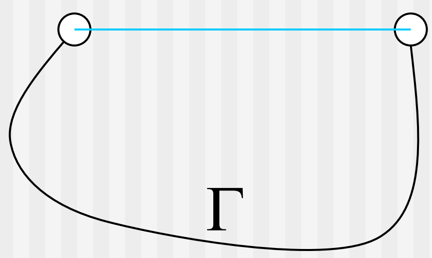


定理1(证明(6)⇒(1))

(6) G极大无回: 无圈 ∧ 增加任何新边得唯一圈

(1) G是树(连通无回)

- 证明(续):证明G连通: ∀u,v∈V, G∪(u,v)有唯一的圈C, C-(u,v)是u,v之间的路径.　#



定理9.2

- 定理9.2: n阶非平凡树至少有2个树叶
- 证明: 设T有x个树叶, 由定理9.1和握手定理,

  $2m = 2(n-1) = 2n-2 = \Sigma d(v)$

  $= \Sigma_{v\text{是树叶}} d(v) + \Sigma_{v\text{是分支点}} d(v)$

  $\geq x + 2(n-x) = 2n-x$, 所以 $x \geq 2$. #

*无向树的计数(counting): t_n

- t_n: n(≥1)阶非同构无向树的个数
- t_n的生成函数(generating function):

$$t(x) = t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + \ldots + t_nx^n + \ldots$$

- Otter公式:

$$t(x) = r(x) - (r(x)^2 - r(x^2)) / 2$$

- r(x)的递推公式:

$$r(x) = x\Pi_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-r_i}$$

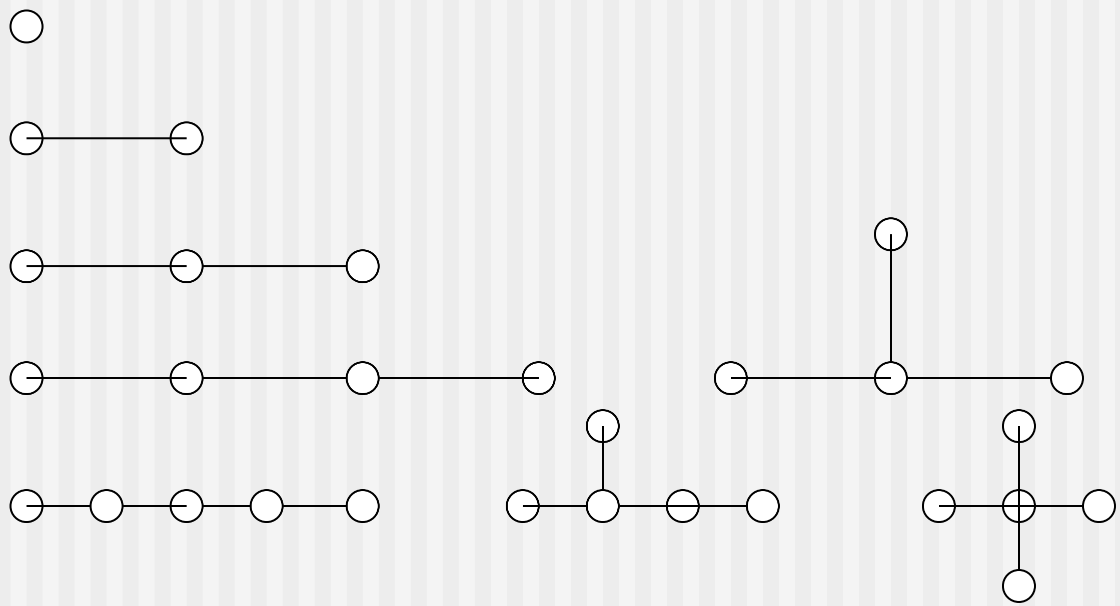
$$r(x) = r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + \ldots + r_nx^n + \ldots$$

t_n表

n	t_n	n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	1	9	47	17	48,629	25	104,636,890
2	1	10	106	18	123,867	26	279,793,450
3	1	11	235	19	317,955	27	751,065,460
4	2	12	551	20	823,065	28	2,023,443,032
5	3	13	1,301	21	2,144,505	29	5,469,566,585
6	6	14	3,159	22	5,623,756	30	14,830,871,802
7	11	15	7,741	23	14,828,074	31	40,330,829,030
8	23	16	19,320	24	39,299,897	32	109,972,410,221

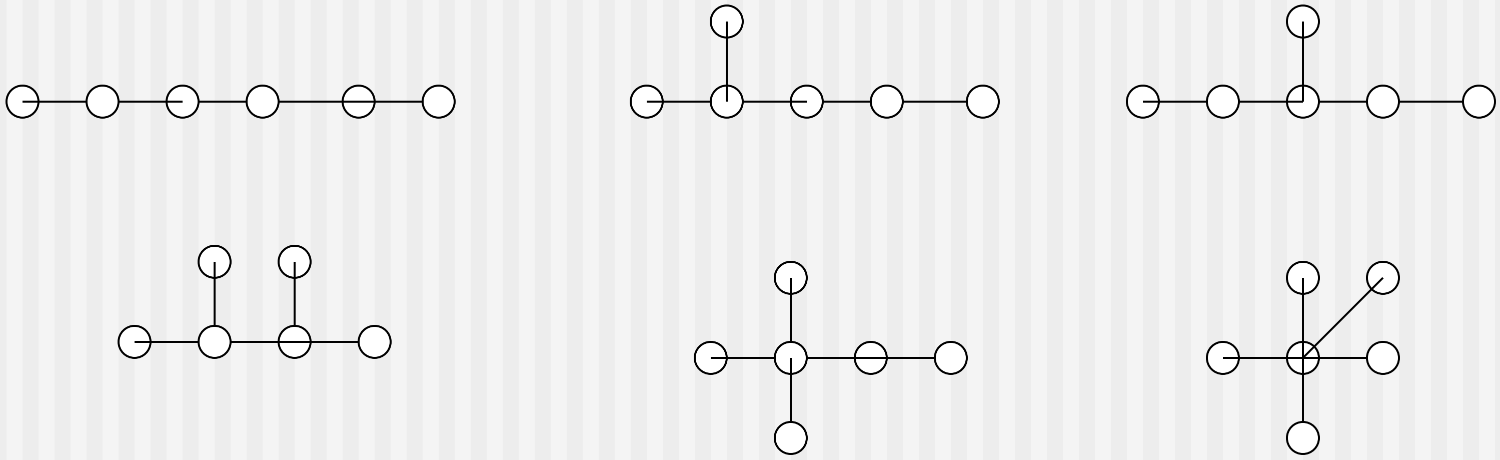
无向树的枚举(enumeration)

- 画出所有非同构的n阶无向树
- n=1:
- n=2:
- n=3:
- n=4:
- n=5:



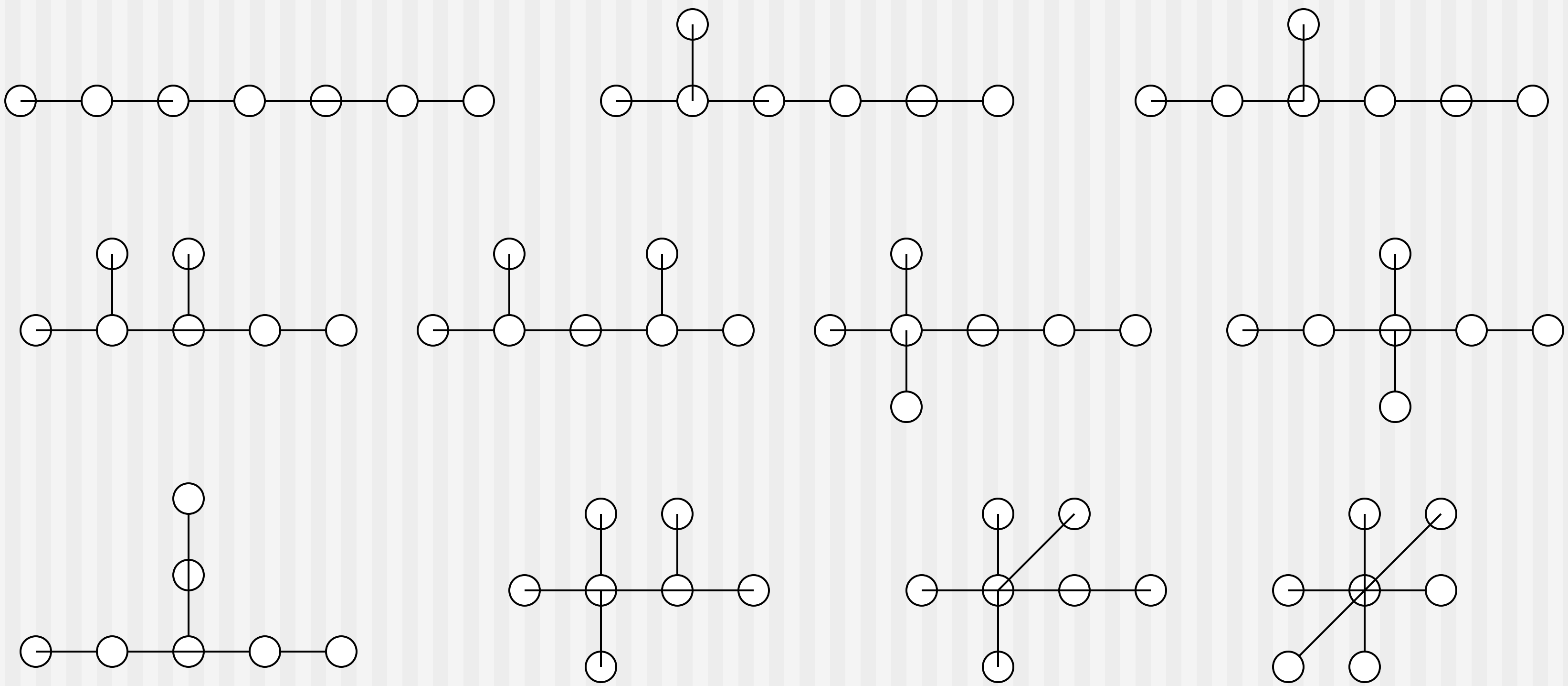
6阶非同构无向树

- n=6: $t_6=6$



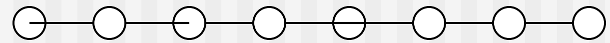
7阶非同构无向树

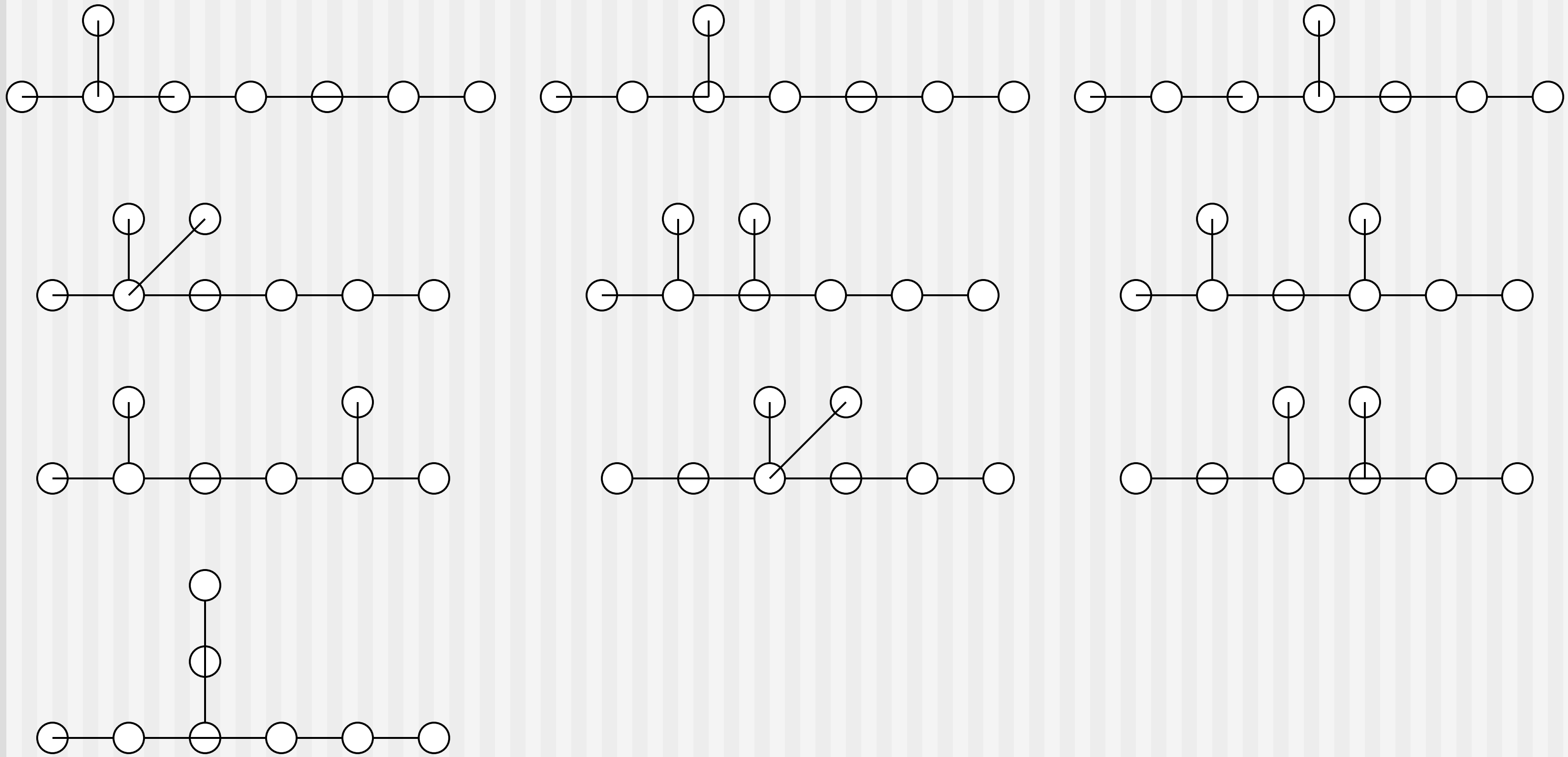
- $n=7$: $t_7=11$



8阶非同构无向树

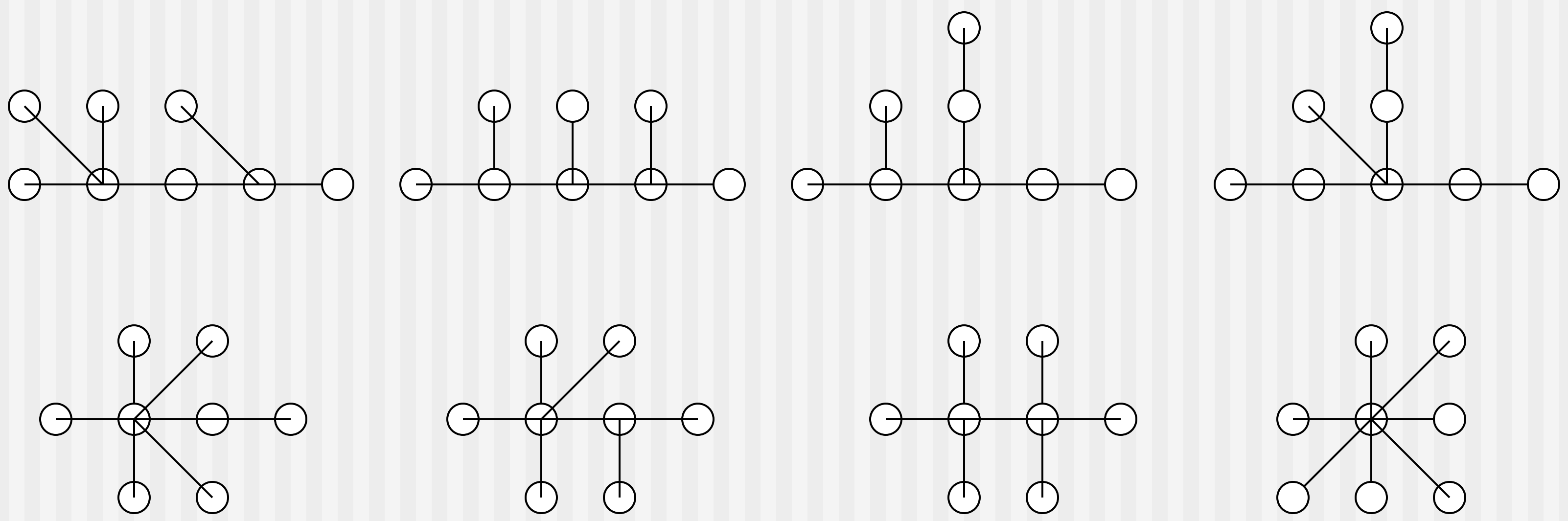
- n=8: t_8=23





8阶非同构无向树(续)

- n=8: t_8=23



8阶非同构无向树(解法2)

- n=8: 度数列有11种:

(1)^{1} 1 1 1 1 1 1 1 7

(2)^{1} 1 1 1 1 1 1 2 6

(3)^{1} 1 1 1 1 1 1 3 5

(4)^{1} 1 1 1 1 1 1 4 4

(5)^{2} 1 1 1 1 1 2 2 5

(6)^{3} 1 1 1 1 1 2 3 4

(7)^{1} 1 1 1 1 1 3 3 3

(8)^{5} 1 1 1 1 2 2 3 3

(9)^{3} 1 1 1 1 2 2 2 4

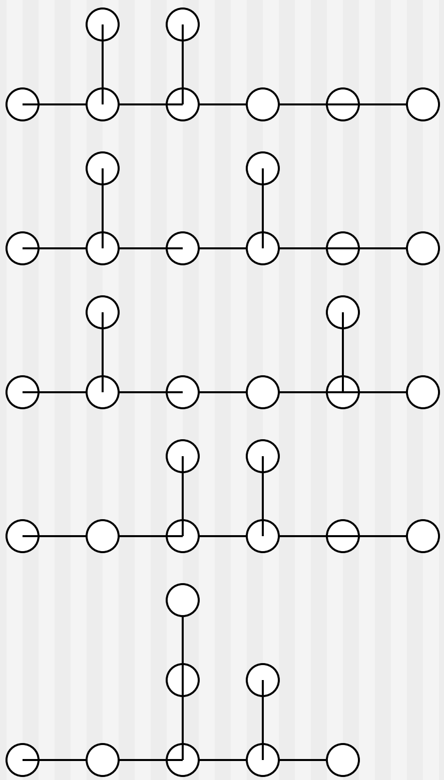
(10)^{4} 1 1 1 2 2 2 2 3

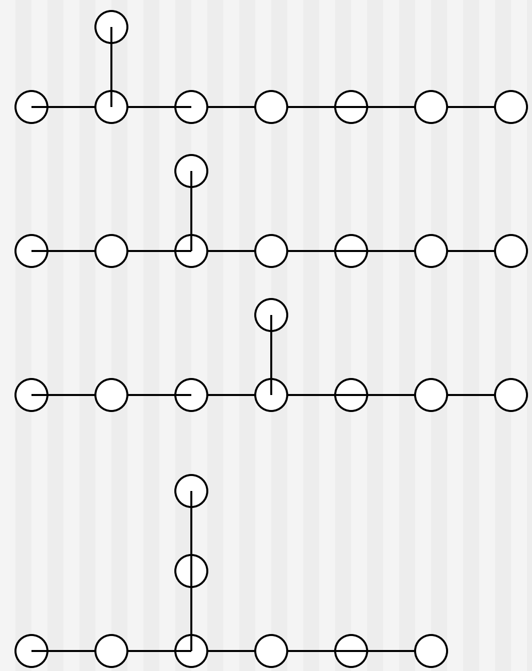
(11)^{1} 1 1 2 2 2 2 2 2

8阶非同构无向树(解法2)

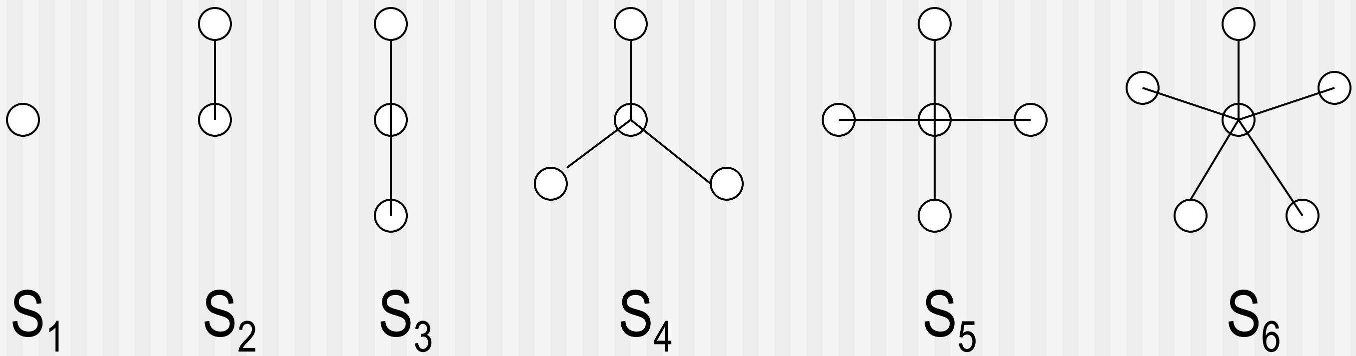
- n=8: 度数列有11种:

$(8)^{5}$ 1 1 1 1 2 2 3 3 $(10)^{4}$ 1 1 1 2 2 2 2 3





星(star)

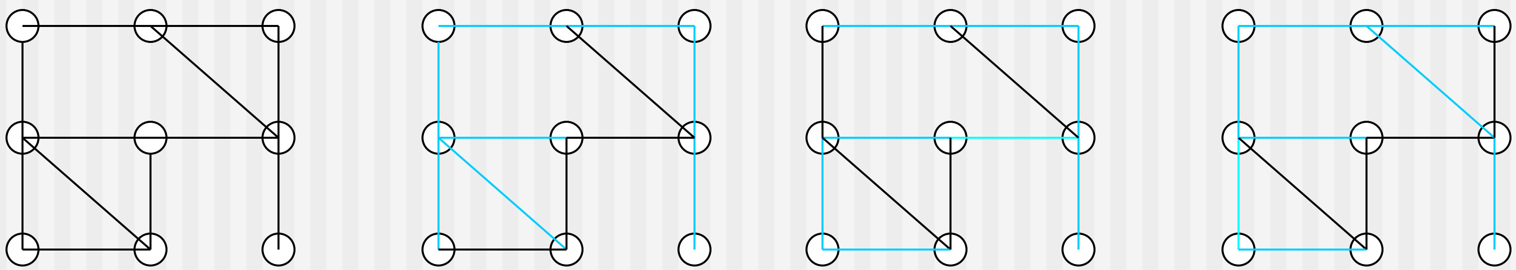


n阶星型图： 1个分支点带n-1片树叶的n阶无向图. $\mathbf{S_n}$

星心： 分支点

生成树(spanning tree)

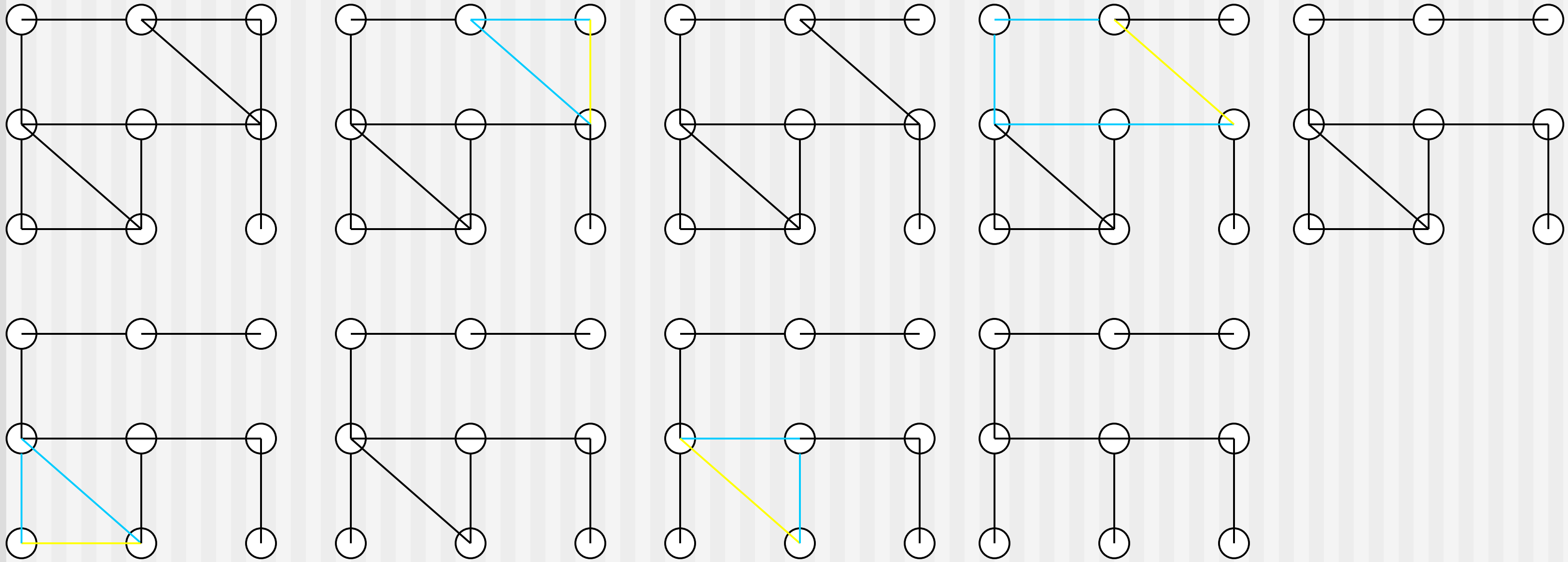
- 生成树: $T \subseteq G \wedge V(T)=V(G) \wedge T$是树
- 树枝(tree edge): $e \in E(T)$, $n-1$条
- 弦(chord): $e \in E(G)-E(T)$, $m-n+1$条
- 余树: $G[E(G)-E(T)] = \overline{T}$



定理9.3

- 定理9.3: 无向图G连通 $\Leftrightarrow$ G有生成树
- 证明: ($\Leftarrow$) 显然. ($\Rightarrow$) 破圈法. #

若G无圈,则G为自己的生成树.若G中含圈, 任取一个圈C,随便删除C上任何一条边, 所得图仍然是连通的,继续这一过程,直到最后得到的图无圈为止,设最后的图为T, 则T是连通的且是G的生成子图。



推论

- 推论1: G是n阶m边无向连通图 $\Rightarrow$ $m \geq n-1$.
- 推论2: T是n阶m边无向连通图G的生成树 $\Rightarrow$ $|E(\overline{T})| = m-n+1$.
- 推论3: T是连通图G中一棵生成树,$\overline{T}$是T的余树,C为G中任意一圈,则$E(\overline{T}) \cap E(C) \neq \varnothing$.

证明:(反证法)如果$E(\overline{T}) \cap E(C) = \varnothing$,则 $E(C) \subseteq E(T)$,T中有回路与T是树矛盾! #

定理9.4 弦与圈

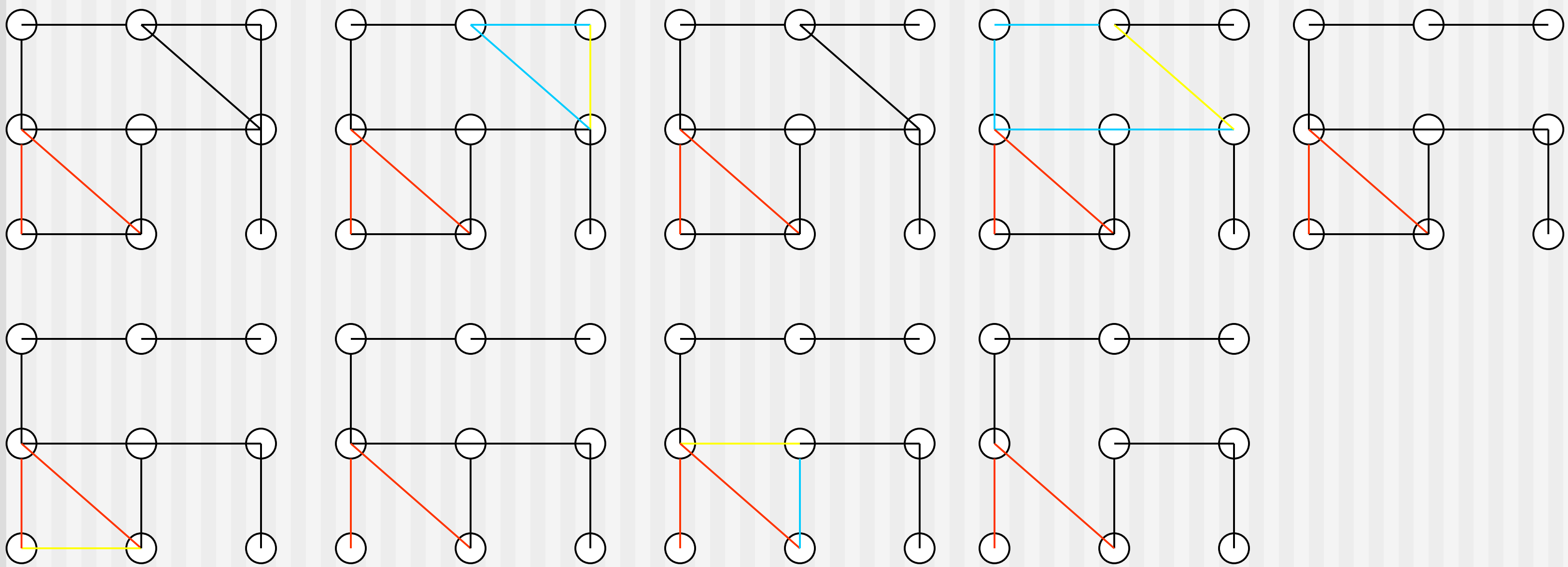
- 定理9.4:T是G的生成树,e为T的任意一条弦,则$T \cup e$中含G的只含一条弦其余边均为树枝的圈，而且不同的弦对应的圈是不同的.

证明：设e=(u,v),则u,v之间在T中存在唯一的路径P(u,v),则$P(u,v) \cup e$为G中只含弦e其余边均为树枝的圈.当e_1,e_2不同时,e_2不在e_1对应的圈C_{e1},e_1不在e_2对应的圈C_{e2}.

例9.1

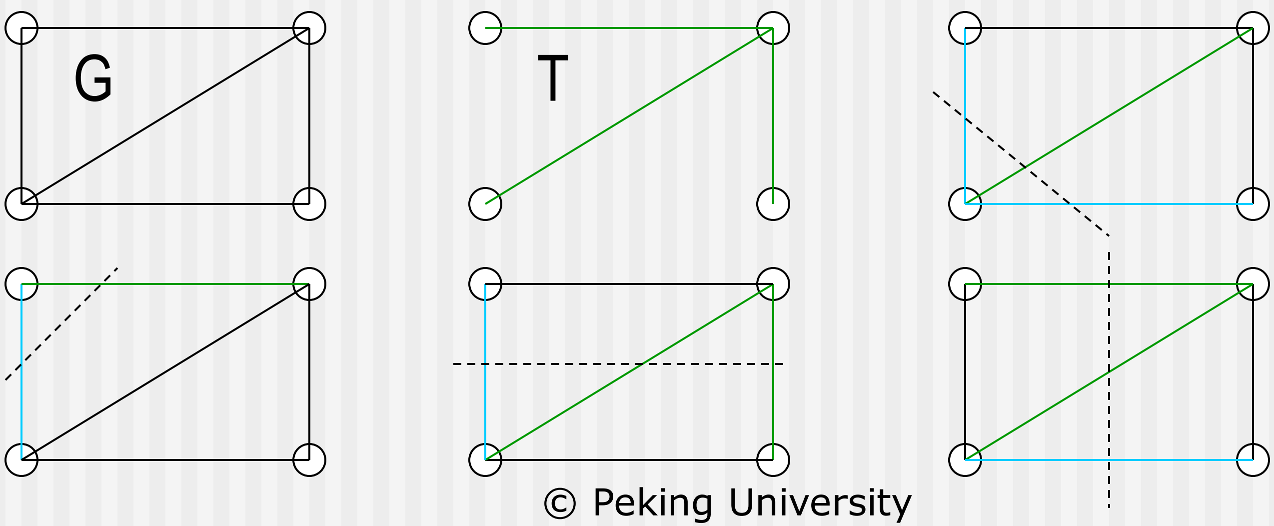
- 设G是无向连通图, $G' \subseteq G$, G'无圈, 则G中存在生成树T, $G' \subseteq T \subseteq G$.

证明: 若G是树,结论显然成立.若G不是树,则含圈为C_1. 则$\exists e_1 \in E(C_1)-E(G')$, 令$G_1=G-\{e_1\}$. 若$G_1$还有圈$C_2$, 则$\exists e_2 \in E(C_2)-E(G')$, 令$G_2=G_1-\{e_2\}= G-\{e_1,e_2\}$. 重复进行, 直到$G_k=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_k\}$无圈为止, $T=G_k$. #



割集与生成树

- 定理9.13：设T是连通图G的生成树，S是G中的割集，则$E(T) \cap S \neq \varnothing$.(每个割集至少包含G的每棵生成树的一个树枝)
- 证明：(反证) 若$E(T) \cap S = \varnothing$，则$T \subseteq G-S$，则G-S连通，S是割集，矛盾！#

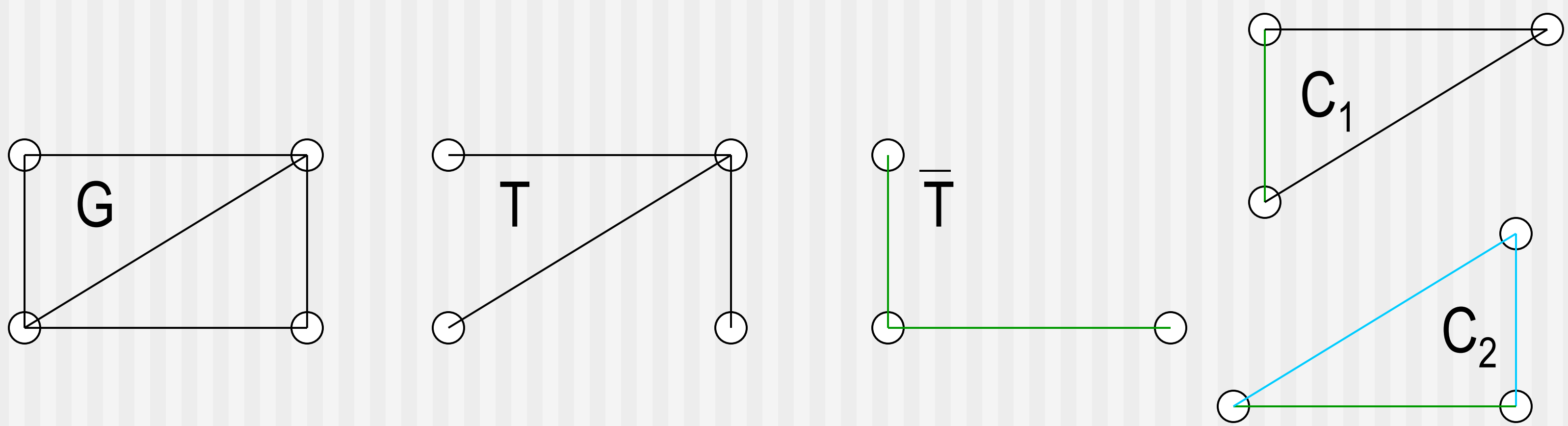


树枝与割集

- 定理9.5: 设G是连通图, T是G的生成树, e是T的树枝, 则G中存在由树枝e和其他弦组成的割集, 并且不同的树枝对应不同的割集.
- 证明: e是T的桥, 设T-e的两个连通分支是T_1与T_2, 则$S_e=\{e|e \in E(G)$且e的两个端点分别属于$V(T_1)$和$V(T_2)\}$中,除e外的元素都是弦,S_e是割集. 设e_1,e_2是不同的树枝,对应的割集是S_{e1},S_{e2}, 则$e_1 \in S_{e1}-S_{e2}$, $e_2 \in S_{e2}-S_{e1}$, 所以$S_{e1} \neq S_{e2}$. #

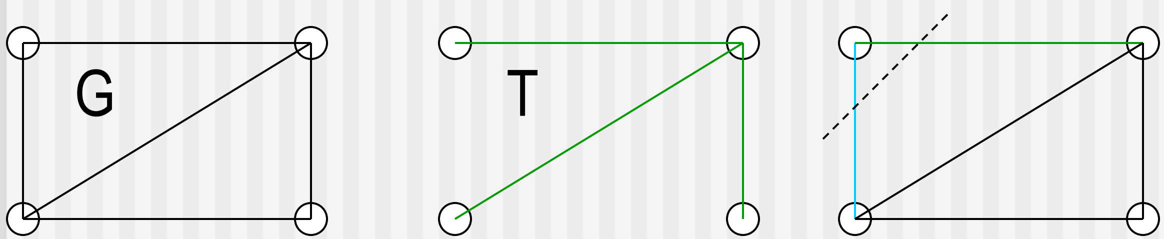
定义9.3

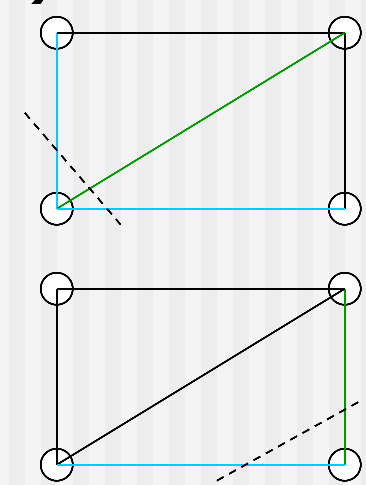
- 设G是n阶m边无向连通图, T是G的生成树, $\overline{T}=\{e'_1,e'_2,\ldots,e'_{m-n+1}\}$
- 基本(fundamental)回路: $T\cup e'_r$中的唯一回路C_r
- 基本回路系统: $\{C_1,C_2,\ldots,C_{m-n+1}\}$
- 圈秩$\xi(G)$: $\xi(G)=m-n+1$



基本割集

- 设G是n阶m边无向连通图, T是G的生成树, $T=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}\}$
- 基本割集: e_r对应的唯一割集S_r
- 基本割集系统: $\{S_1,S_2,\ldots,S_{n-1}\}$
- 割集秩$\eta(G)$: $\eta(G)=n-1$ (η: eta)

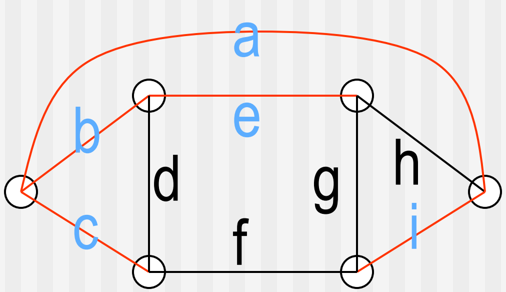


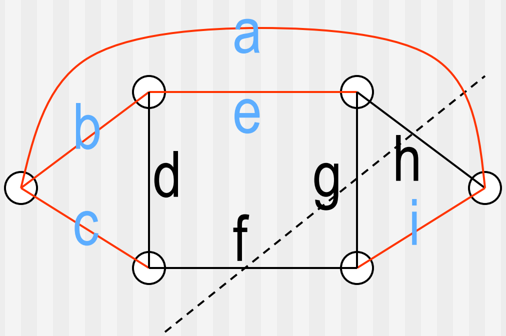


例9.2

- 例9.2: G如图,T={a,b,c,e,i}是G的生成树,求对应T的基本回路系统和基本割集系统.
- 解: $\overline{T}$={d,f,g,h}, 基本回路: C_d=dcb, C_f=fcai, C_g=gebai, C_h=heba, 基本回路系统: {C_d,C_f,C_g,C_h}.

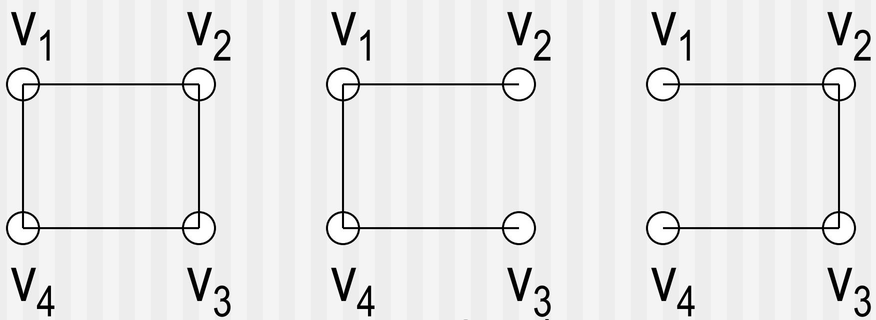
基本割集: S_a={a,h,g,f}, S_b={b,d,g,h}, S_c={c,d,f}, S_e={e,g,h}, S_i={i,g,f}, 基本割集系统: {S_a,S_b,S_c,S_e,S_i}. #





生成树的计数: $\tau(G)$

- $\tau(G)$: 标定图G的生成树的个数
- 若$E(T_1) \neq E(T_2)$,则认为$T_1 \neq T_2$
- G-e: 删除(deletion)
- G\e: 收缩(contraction)
- 定理9.6: n阶无向连通标定图,对G的任意非环边e, $\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\backslash e)$

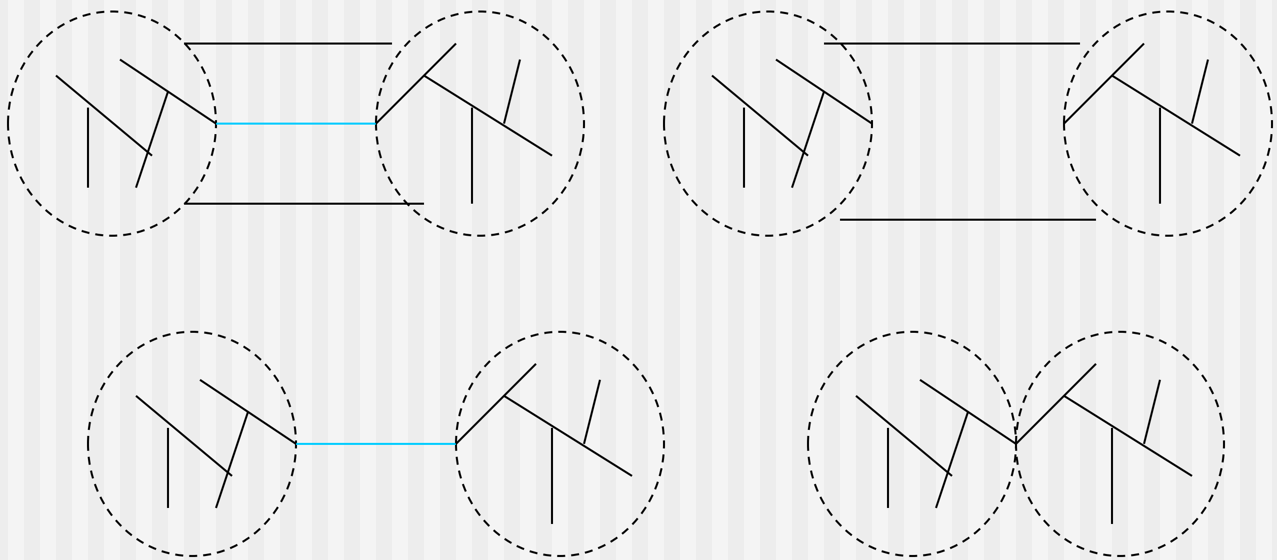


定理9.6(证明)

- 证明: ∀e非环,

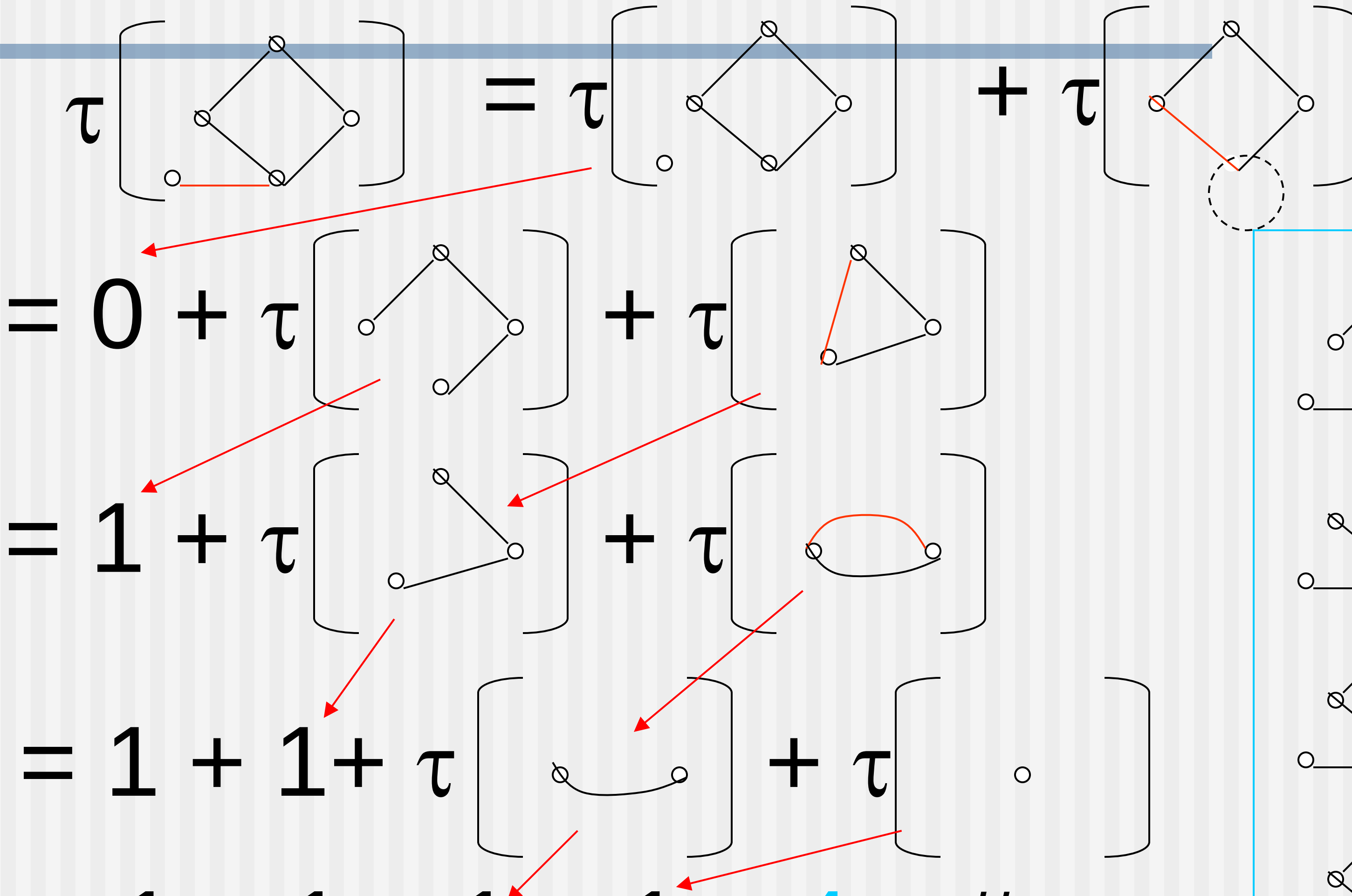
(1) 不含e的G的生成树个数: $\tau(G-e)$,

(2) 含e的G的生成树个数: $\tau(G\backslash e)$. #

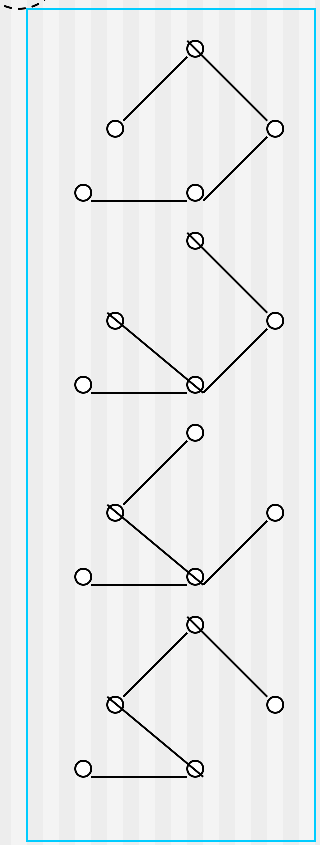


- 注意：由于环不在任何生成树中，因而在计算过程中若出现环应自动将环去掉

例9.3



$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$ #



Cayley公式

- 定理7(Cayley公式): $n \geq 2 \Rightarrow \tau(K_n)=n^{n-2}$.
- 证明: 令$V(K_n)=\{1,2,\ldots,n\}$, 用V中元素构造长度为(n-2)的序列,有n^{n-2}个不同序列,这些序列与K_n的生成树是一一对应的.

Cayley公式(证明(1))

- 证明(续): (1) 由树构造序列: 设T是任意生成树. 令

$k_1=\min\{\ r \mid d_T(\ r\ )=1\ \}$, $N_T(k_1)=\{\ l_1\ \}$,

$k_2=\min\{\ r \mid d_{T-\{k1\}}(\ r\ )=1\ \}$, $N_{T-\{k1\}}(k_2)=\{\ l_2\ \}$,

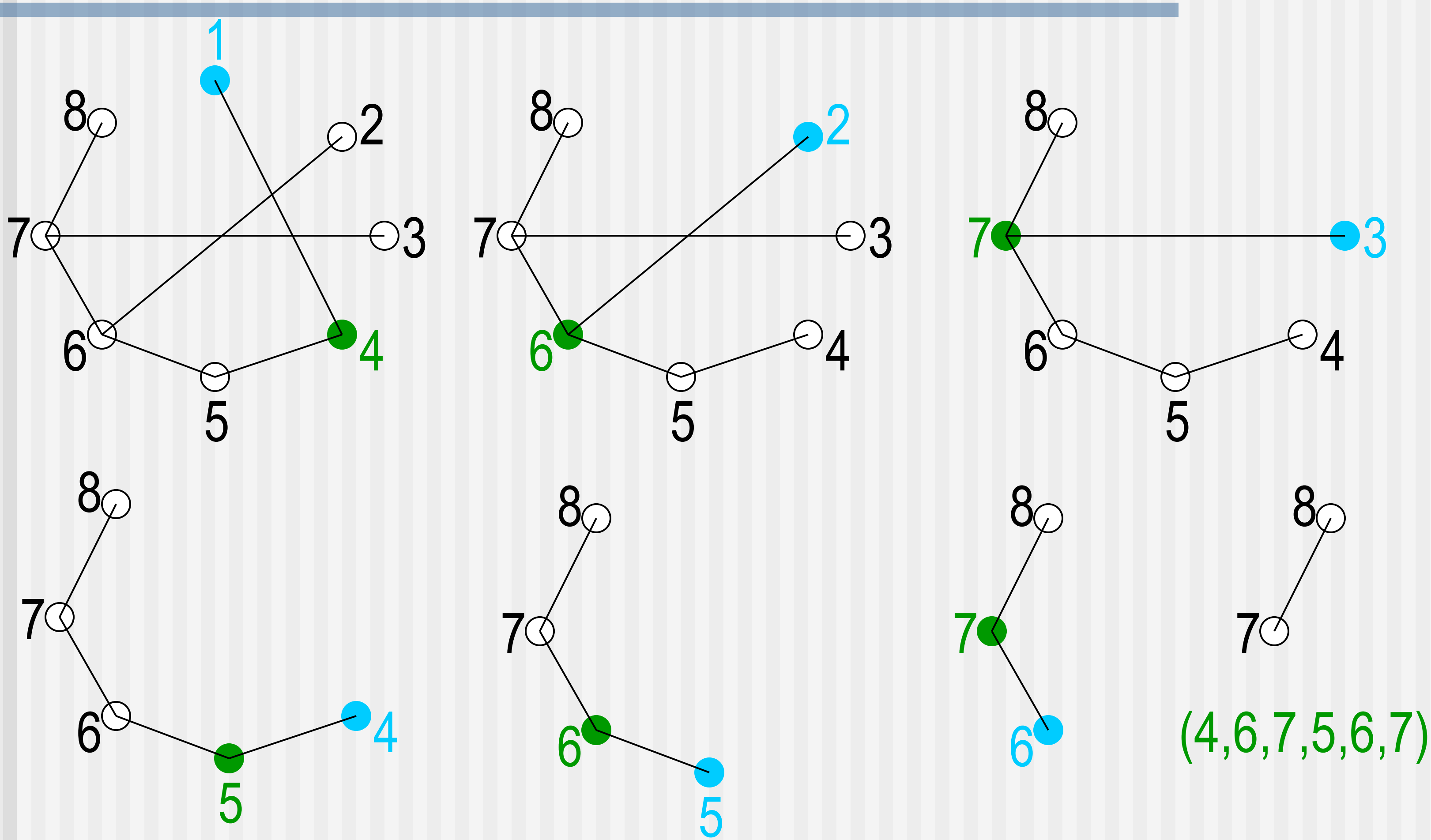
……

$k_{n-2}=\min\{\ r \mid d_{T-\{k1,k2,\ldots kn-3\}}(\ r\ )=1\ \}$,

$N_{T-\{k1\ ,k2,\ldots kn-3\}}(k_{n-2})=\{\ l_{n-2}\ \}$,

得到序列 $(l_1,l_2,\ldots,l_{n-2})$.

Cayley公式(证明(1)举例)



Cayley公式(证明(2))

- 证明(续): (2) 由序列构造树: 设$(l_1,l_2,\ldots,l_{n-2})$是任意序列. 令

$k_1=\min\{\ r \mid r\in V-\{l_1,l_2,\ldots,l_{n-2}\}\ \}$,

$k_2=\min\{\ r \mid r\in V-\{k_1,l_2,\ldots,l_{n-2}\}\ \}$,

……

$k_{n-2}=\min\{\ r \mid r\in V-\{k_1,k_2,\ldots,k_{n-3},l_{n-2}\}\ \}$,

$k_{n-1}=\min\{\ r \mid r\in V-\{k_1,k_2,\ldots,k_{n-3},k_{n-2}\}\ \}$,

$l_{n-1}=\min\{\ r \mid r\in V-\{k_1,k_2,\ldots,k_{n-3},k_{n-2},k_{n-1}\}\ \}$.

$E(T)=\{\ (k_i,l_i) \mid i=1,2,\ldots,n-1\}$.

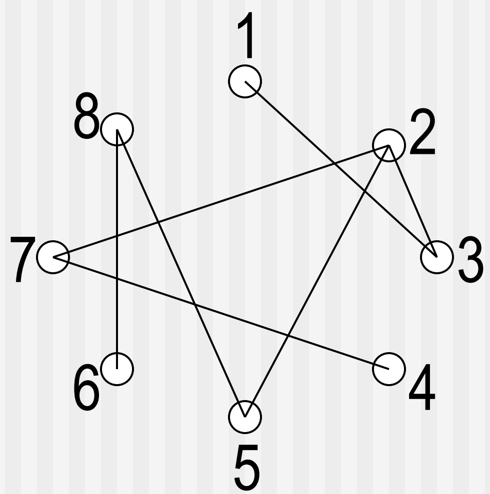
Cayley公式(证明(2)举例)

- (3,2,7,8,2,5)
- $k_1=\min(V-\{3,2,7,8,2,5\})=\min\{1,4,6\}=1$,
  $k_2=\min(V-\{1,2,7,8,2,5\})=\min\{3,4,6\}=3$,
  $k_3=\min(V-\{1,3,7,8,2,5\})=\min\{4,6\}=4$,
  $k_4=\min(V-\{1,3,4,8,2,5\})=\min\{6,7\}=6$,
  $k_5=\min(V-\{1,3,4,6,2,5\})=\min\{7,8\}=7$,
  $k_6=\min(V-\{1,3,4,6,7,5\})=\min\{2,8\}=2$,
  $k_7=\min(V-\{1,3,4,6,7,2\})=\min\{5,8\}=5$,
  $l_7=\min(V-\{1,3,4,6,7,2,5\})=\min\{8\}=8$

Cayley公式(证明(2)举例)

- (3,2,7,8,2,5)
- (1,3,4,6,7,2,5)

  (3,2,7,8,2,5,8)



Cayley公式(证明(2)续)

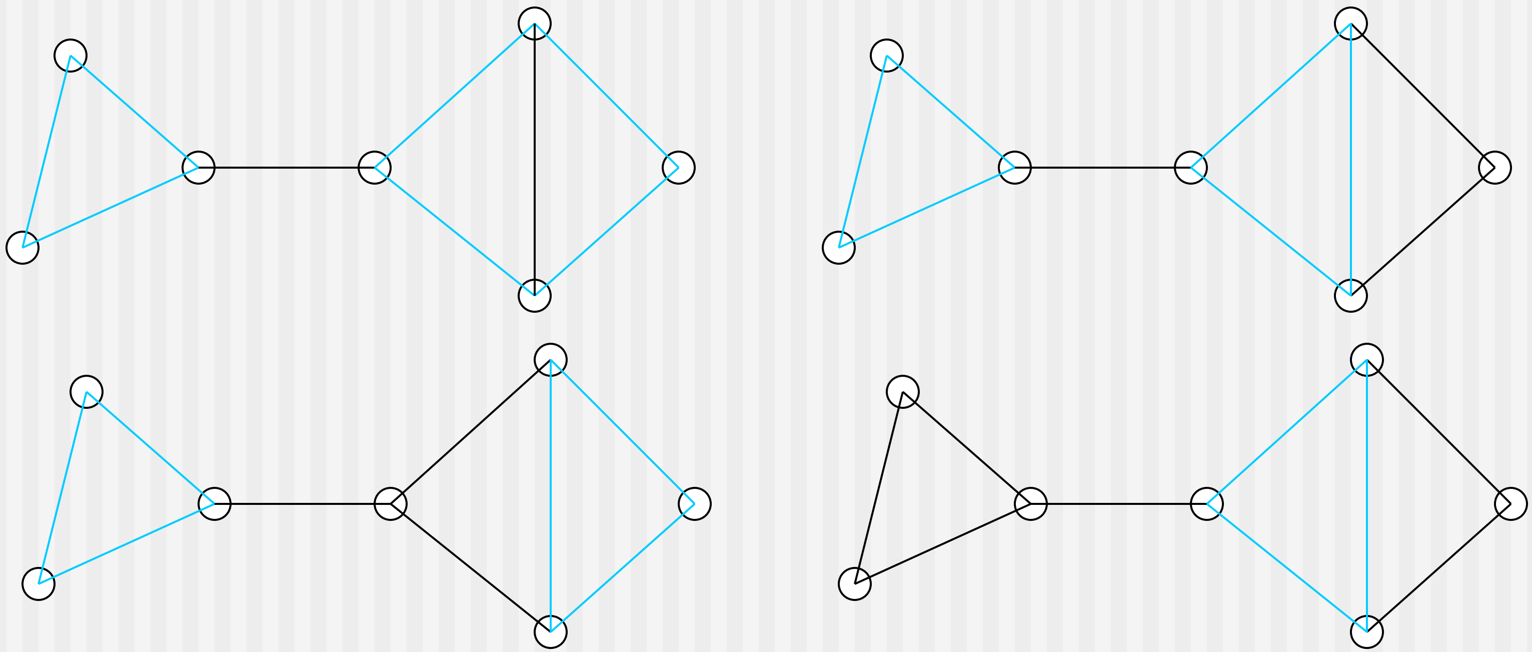
- 定理7(Cayley公式): $n \geq 2 \Rightarrow \tau(K_n)=n^{n-2}$.
- 证明(续): 可以证明, 上述(1)和(2)建立的对应关系是双射: 每个树都得出序列, 每个序列都得出树; 由不同的树得出不同的序列, 由不同的序列得出不同的树. #

概述

- 连通图----生成树----树枝，弦
- 回路----弦----基本回路----环路
- 割集----树枝----基本割集----断集

环路

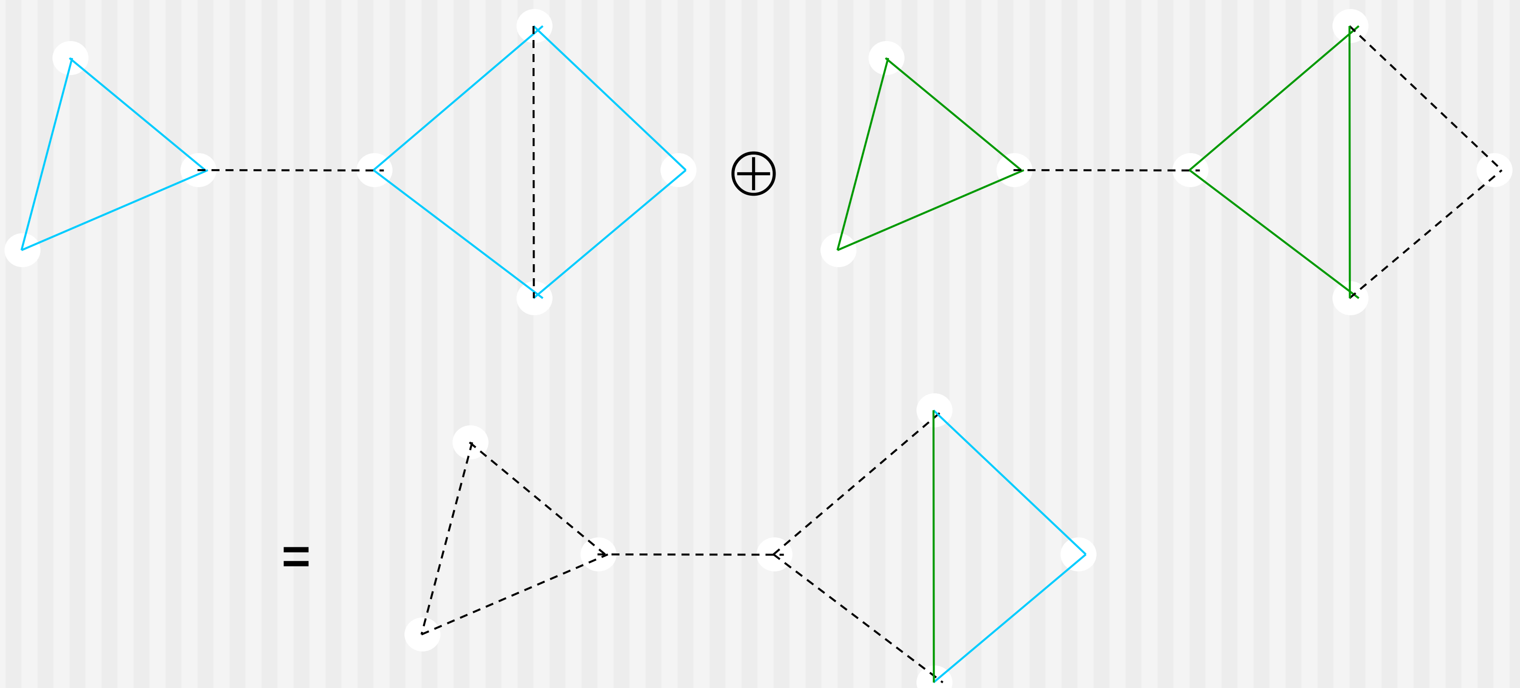
- 环路：若干个边不重的圈之并，或∅



圈、简单回路都是环路，环路不一定是回路，因为环路可以不连通

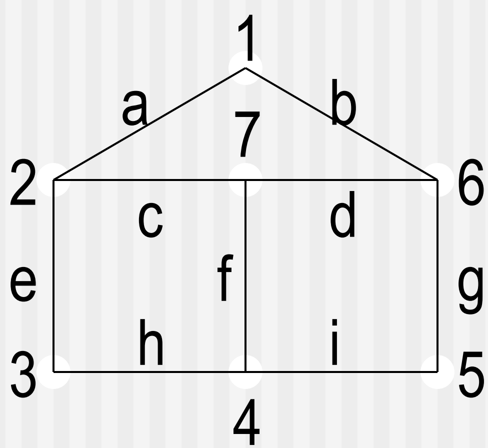
环路与环和

- 定理：两个环路的环和还是环路
- $E(G_1 \oplus G_2) = E(G_1) \oplus E(G_2)$（对称差）



断集

- 断集: 无向图$G=\langle V,E\rangle$, $\varnothing\neq V_1\subset V$, $\overline{V_1}=V-V_1$, $(\overline{V_1},V_1)=E\cap(\overline{V_1}\&V_1)$称为断集
- 例: $V_1=\{1\}$, $(\overline{V_1},V_1)=\{a,b\}$, $V_2=\{4,7\}$, $(\overline{V_2},V_2)=\{c,d,h,i\}$, $V_3=\{2,4\}$, $(\overline{V_3},V_3)=\{a,c,e,h,f,i\}$ (非割集). #

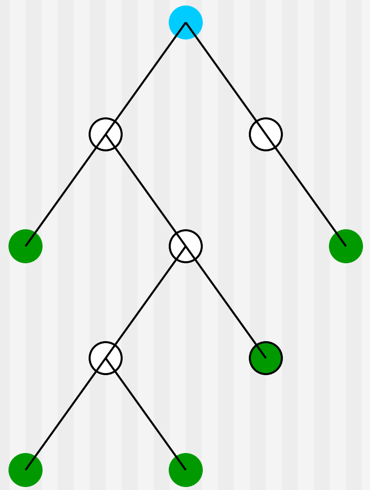


割集是断集

断集不一定是割集

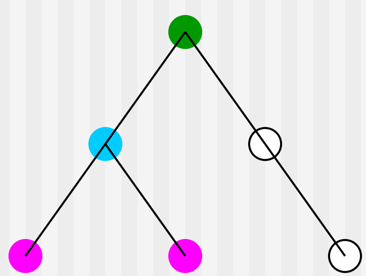
根树(rooted tree)

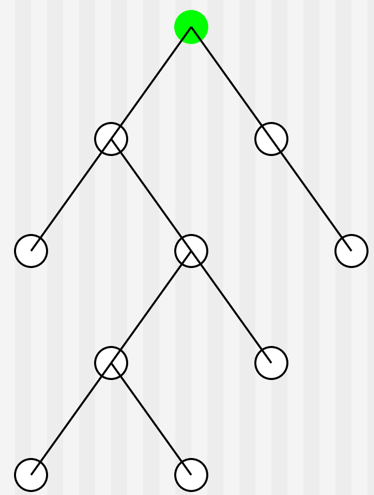
- 有向树: 基图是树的有向图
- 根树(rooted tree): 若有向树T是平凡树或顶点的入度为0,其余顶点的入度均为1.
  - 树根:入度为0的顶点
  - 树叶:入度为1出度为0的顶点
  - 内点:入度为1出度不为0的顶点
  - 分支点:树根和内点
  - 层数:树根到v的路径长度
  - 树高:层数最大的顶点的层数



儿子,父亲,兄弟

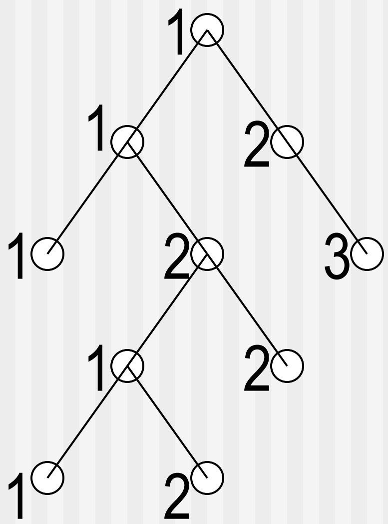
- 儿子: u在上方与v相邻, v是u的儿子
- 父亲: u在上方与v相邻, u是v的父亲
- 兄弟: u与v有相同父亲, u是v的兄弟
- 祖先: 从u可达v, u是v的祖先
- 后代: 从u可达v, u是v的后代





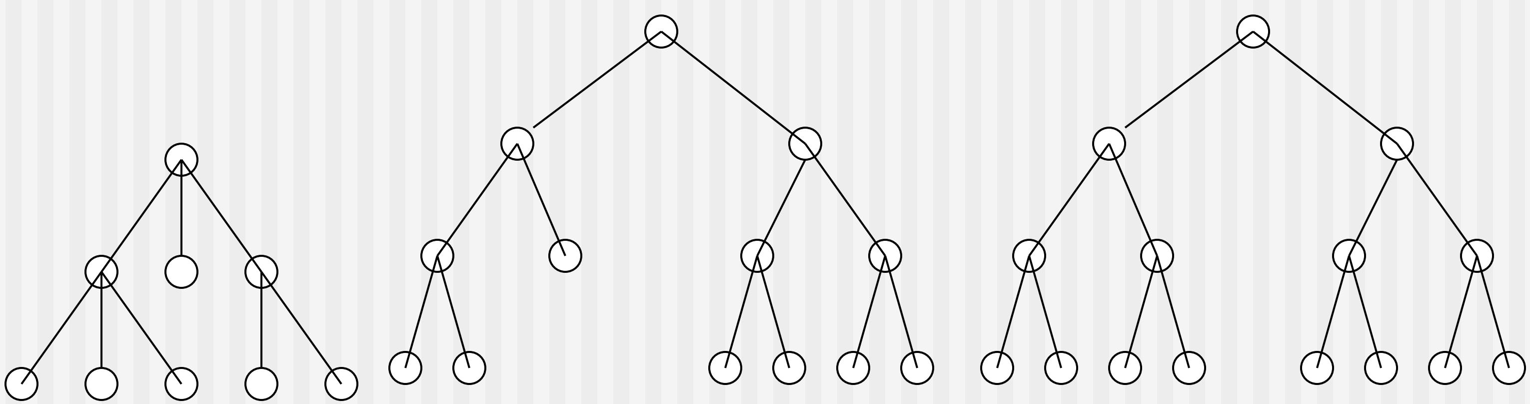
有序树(ordered tree)

- 有序树：给相同层数的顶点标上次序的根树



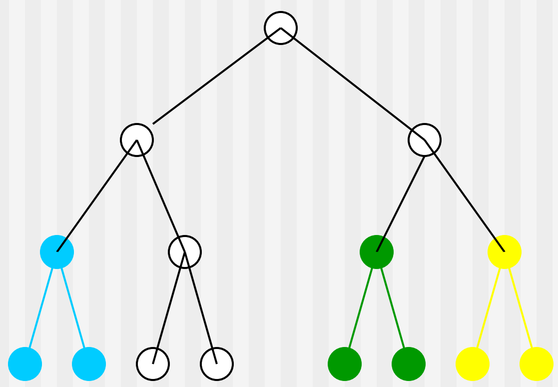
r叉树(t-ary tree)

- r叉树：每个分支点至多有r个儿子
- 正则(regular)r叉树:每个分支点恰好有r个儿子
- 完全(complete)正则r叉树：树叶的层数均为树高的r叉正则树
- 有序r叉树,有序正则r叉树,有序完全正则r叉树



根子树(rooted subtree)

- 根子树: T是根树, v∈V(T), 由v本身及其所有后代导出的子图T_v
- 左子树,右子树: 二叉树中分支点的左右两个儿子导出的根子树

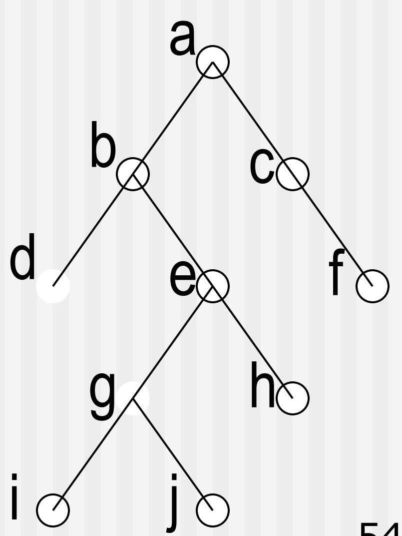


根树的周游(travesal)

- 根树的周游：列出根树的所有顶点，每个顶点恰好出现一次
- 中序行遍：左子树，根，右子树
- 前序行遍：根，左子树，右子树
- 后序行遍：左子树，右子树，根
- 例：中序： dbigjehacf

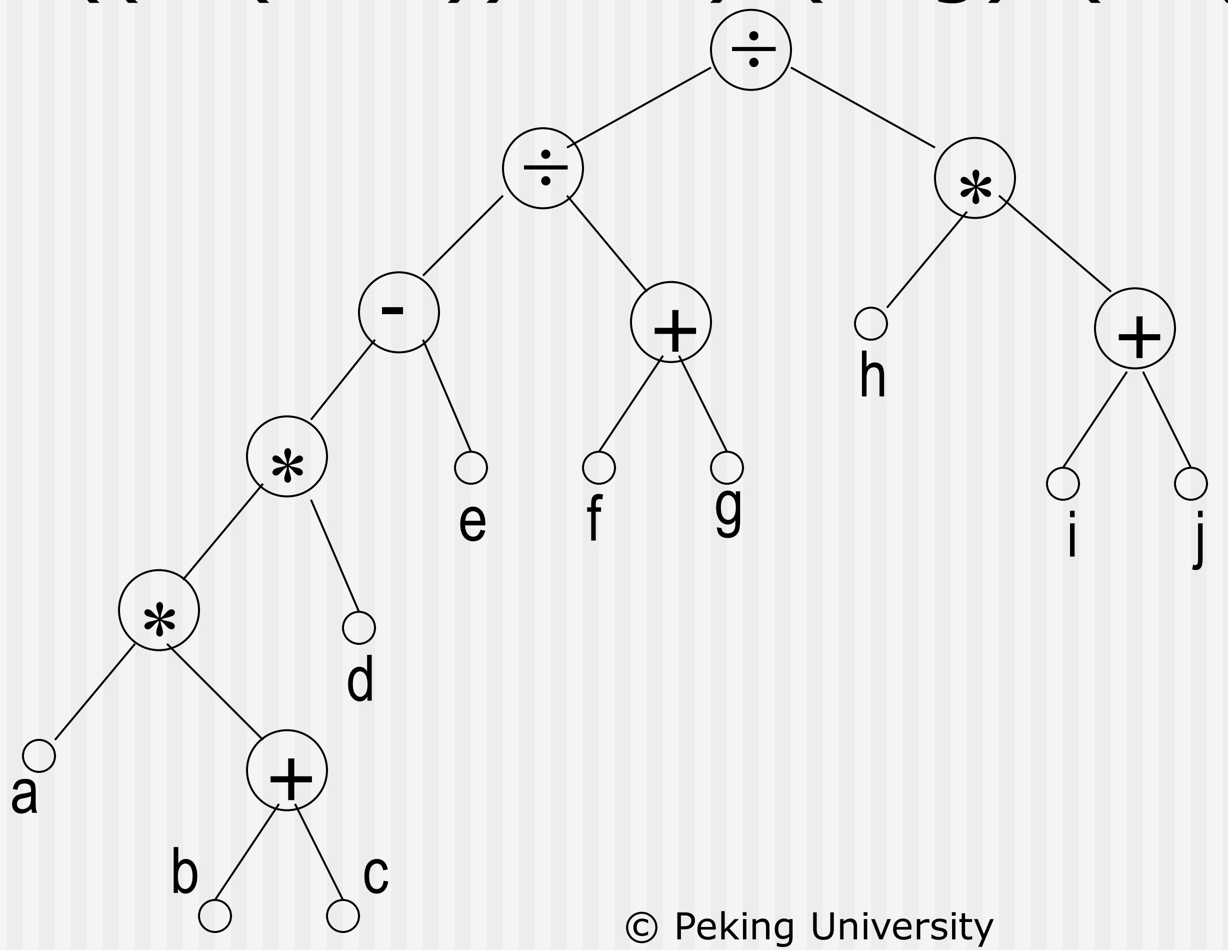
  前序： abdegijhcf

  后序： dijghebfca

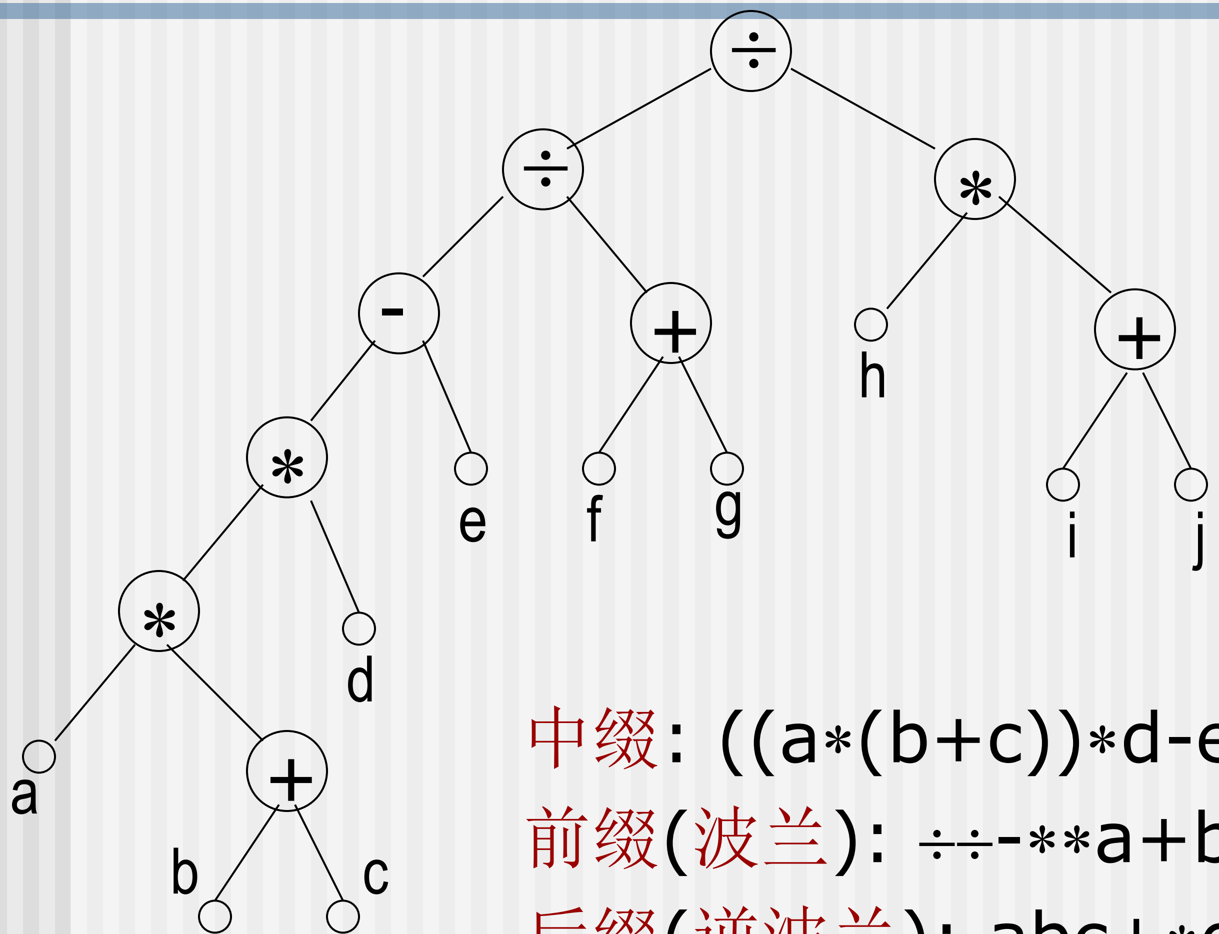


例9.7

- $((a*(b+c))*d-e)\div(f+g)\div(h*(i+j))$



中缀法,前缀法,后缀法(例)



中缀: ((a∗(b+c))∗d-e)÷(f+g)÷(h∗(i+j))

前缀(波兰): ÷÷-∗∗a+bcde+fg∗h+ij

后缀(逆波兰): abc+∗d∗e-fg+÷hij+∗÷

总结

- 无向树
  - 无向树的计数：t_n
  - 无向树的枚举
- 生成树
  - 基本割集系统，基本回路系统
  - 生成树的计数：$\tau(G)$
- 环路、断集
- 根树

作业

- P155: 2，6，10, 11