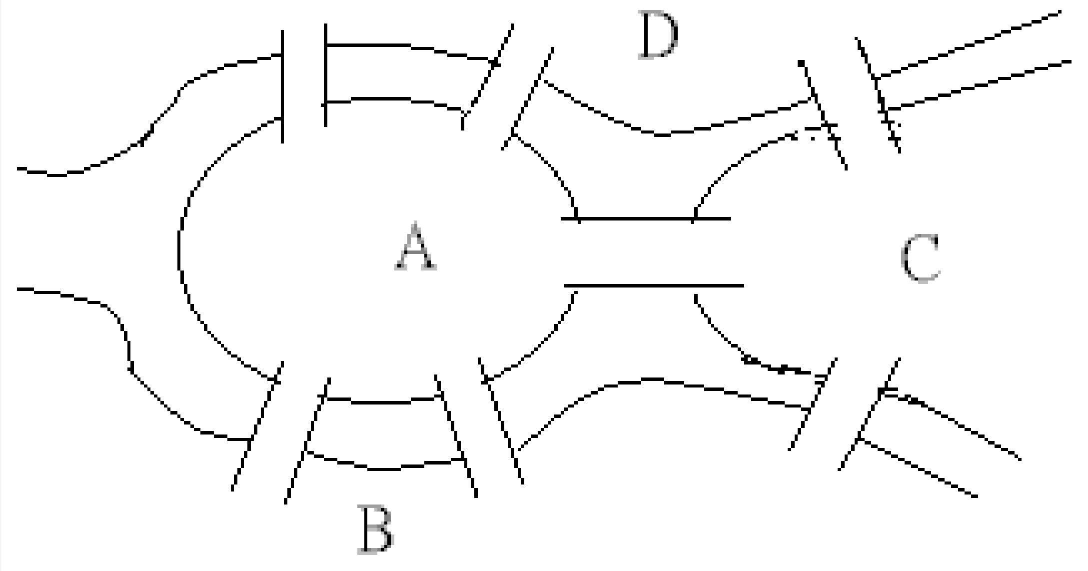
第8章　欧拉图与哈密顿图

- 8.1 欧拉图
  - 具有经过所有边的简单生成回路的图
- 8.2 哈密顿图
  - 具有生成圈的图

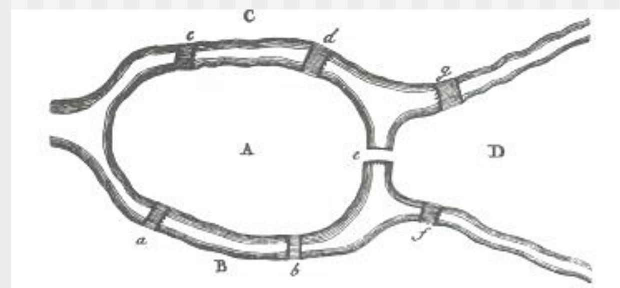
七桥问题

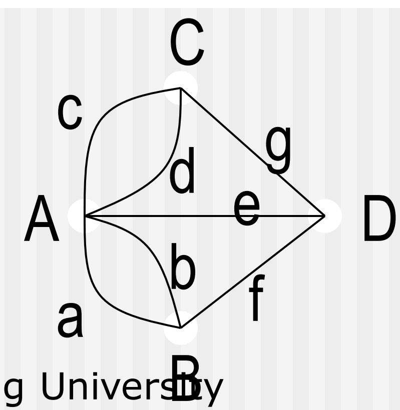
- 哥尼斯堡域 普雷格尔河



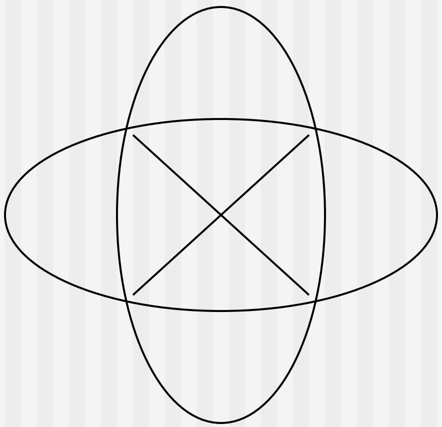
Leonhard Euler

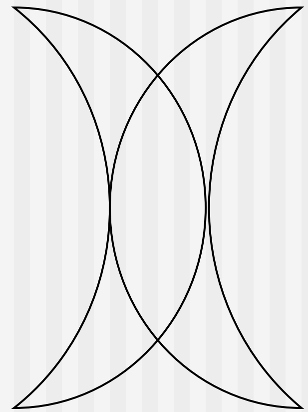
- Leonhard Euler(1707~1783):
  - 人类有史以来最多产的数学家.
  - 1736年,“七桥问题” ,图论和拓扑学诞生

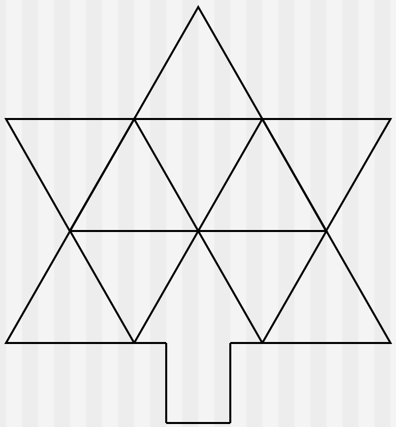


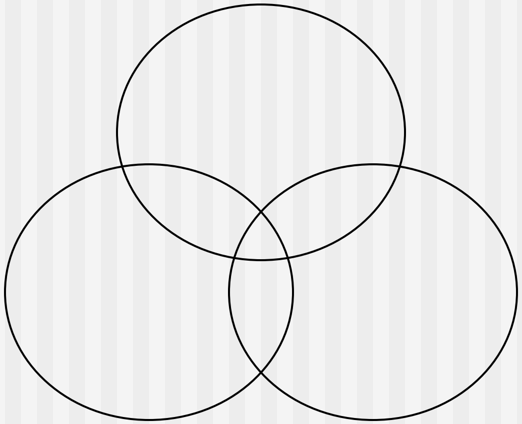


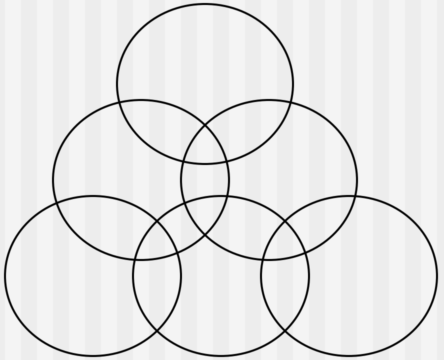
一笔画











欧拉通路(Euler trail)

- 欧拉通路：经过图中所有边一次且仅一次，行遍所有顶点的通路
- 欧拉通路是经过所有边的简单通路并且是生成通路(经过所有顶点)

欧拉回路(Euler tour/circuit)

- 欧拉回路(Euler tour/circuit): 经过图中所有边一次、且仅一次行遍所有顶点的回路
- 欧拉回路是经过所有边的简单生成回路

- 欧拉图(Eulerian)：有欧拉回路的图
- 半欧拉图(semi-Eulerian)：有欧拉通路但无欧拉回路的图
- 规定：平凡图为欧拉图

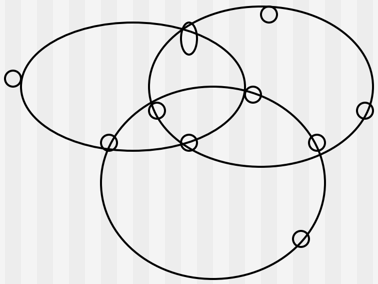
无向欧拉图的充分必要条件

- 定理8.1：设G是无向连通图,则

  (1) G是欧拉图

$\Leftrightarrow$ (2) G中所有顶点都是偶数度

$\Leftrightarrow$ (3) G是若干个边不交的圈的并



定理8.1 (1)⇒(2)

- (1) G是欧拉图

⇒ (2) G中所有顶点都是偶数度

- 证明: 若G是平凡图,结论成立;G是非平凡图,因为G是欧拉图，所以存在欧拉回路,设C为G中一条欧拉回路,

$C=v_{i0}e_1\ v_{i1}e_2\ v_{i2}\ldots e_{m-1}v_{im-1}e_mv_{i0}$

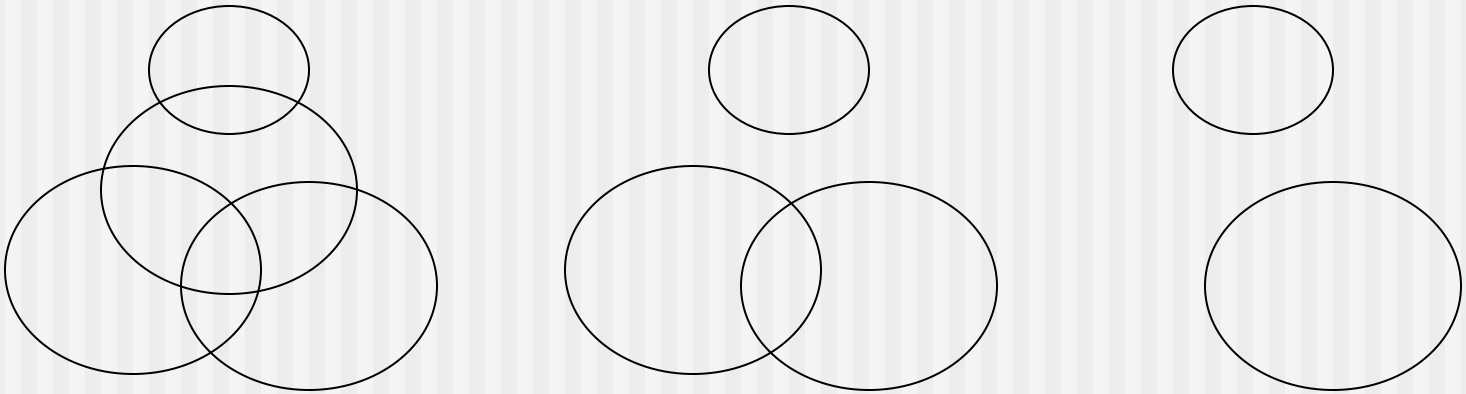
任意v,在C中出现一次就获2度,若总共k次经过顶点v,则d(v)=2k.

定理8.1 (2)⇒(3)

(2) G中所有顶点都是偶数度

(3) G是若干个边不重的圈的并

- 证明: (2)⇒(3): 若删除任意1个圈上的边,则所有顶点的度还是偶数, 但是不一定连通了. 对每个连通分支重复进行.



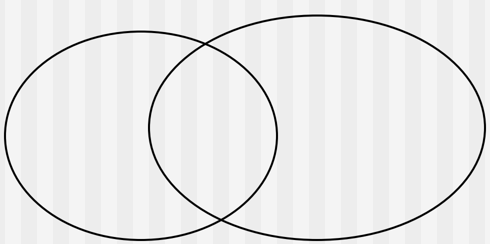
定理8.1 (3)⇒(1)

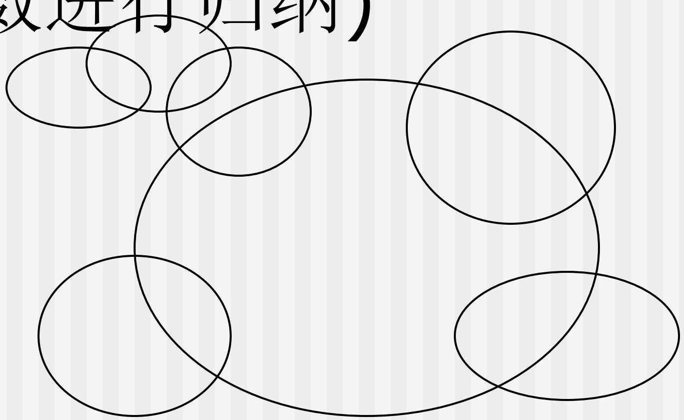
(3) G是若干个边不交的圈的并

(1) G是欧拉图

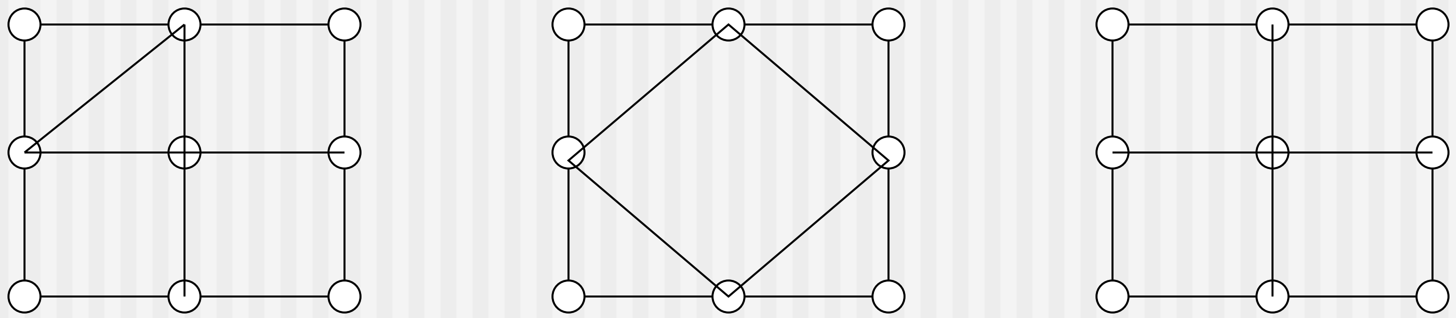
证明: (3)⇒(1): 有公共点但边不交的简单回路, 总可以拼接成欧拉回路: 在交点处,走完第1个回路后再走第2个回路. #

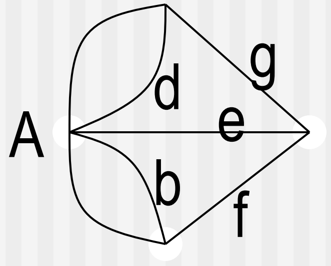
- 归纳法严格证明(圈的个数进行归纳)





例





无向半欧拉图的充分必要条件

- 定理8.2: 设G是无向连通图,则

  (1) G是半欧拉图

$\Leftrightarrow$ (2) G中恰有2个奇度顶点

定理8.2 证明

- G是半欧拉图 $\Leftrightarrow$ G中恰有2个奇度顶点
- 证明:

$\Rightarrow$: 设G为半欧拉图,存在欧拉通路

$C=v_{i0}e_1\, v_{i1}e_2\, v_{i2}\ldots e_{m-1}v_{im-1}e_m v_{im}$

欧拉通路的起点和终点是奇数度,其余顶点都是偶数度.

$\Leftarrow$: 在两个奇数度顶点之间加1条新边,所有顶点都是偶数度,得到欧拉回路.从欧拉回路上删除所加边后,得到欧拉通路. #

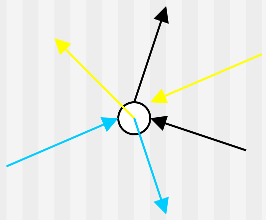
有向欧拉图的充分必要条件

- 定理8.3：设G是有向连通图,则

  (1) G是欧拉图

$\Leftrightarrow$ (2) $\forall v \in V(G)$, $d^+(v)=d^-(v)$

$\Leftrightarrow$ (3) G是若干个边不重的有向圈的并



定理8.3

- 定理8.3: 设G是有向连通图,则

  (1) G是欧拉图

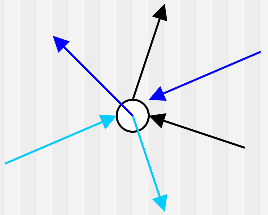
$\Leftrightarrow$ (2) $\forall v \in V(G)$, $d^+(v)=d^-(v)$

$\Leftrightarrow$ (3) G是若干个边不交的有向圈的并

- 证明: (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(1).

(1)$\Rightarrow$(2): 若欧拉回路总共k次经过顶点v,则 $d^+(v)=d^-(v)=k$.

其余与定理1类似. #

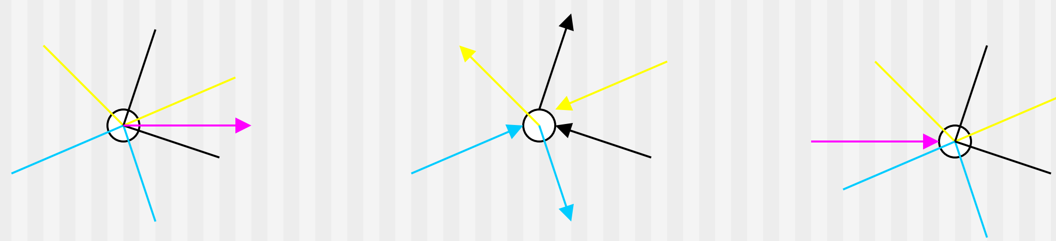


有向半欧拉图的充分必要条件

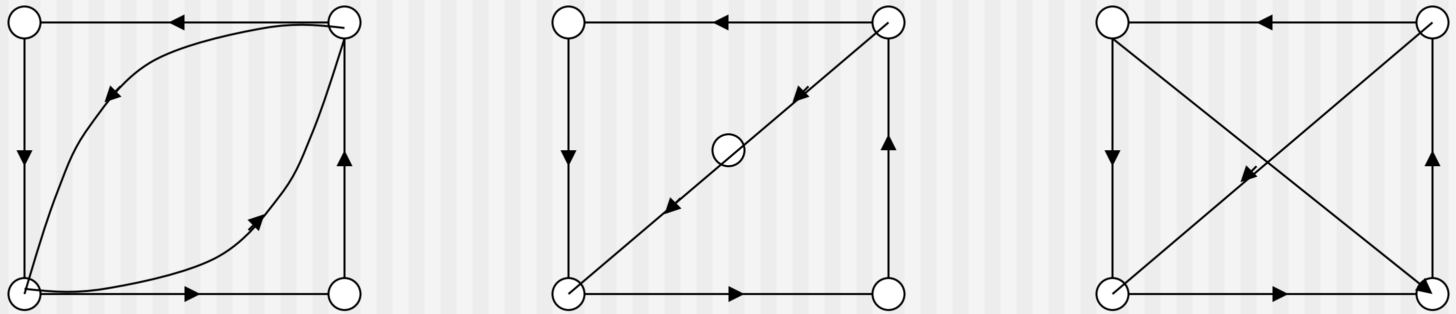
- 定理8.4: 设G是有向连通图,则

  (1) G是半欧拉图

⇔ (2) G中恰有2个奇度顶点, 其中1个入度比出度大1,另1个出度比入度大1, 其余顶点入度等于出度. #



例

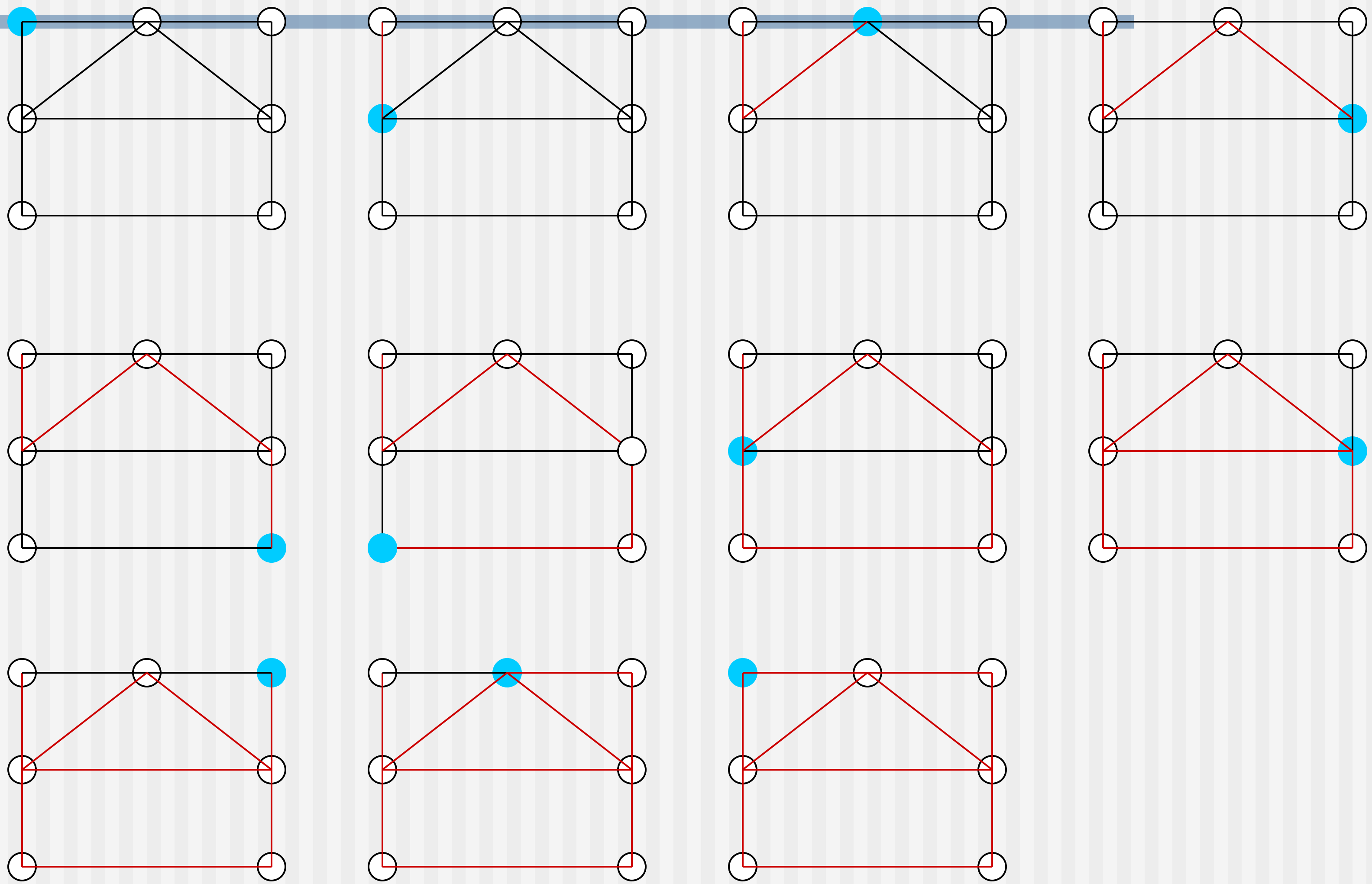


求欧拉通/回路?

Fleury算法(避桥法)

- 输入:无向图G.
- 输出: 欧拉通路/欧拉回路.
- 算法:
  - 从任意一点开始, 沿着没有走过的边向前走
  - 在每个顶点, 优先选择剩下的非桥边, 除非只有唯一一条边
  - 直到得到欧拉回路或宣布失败

Fleury算法(举例)



Fleury算法(迭代形式)

- 算法:

(1) $P_0:=v_0$;

(2) 设$P_i=v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$已经行遍,设$G_i=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$,

$e_{i+1}:=G_i$中满足如下2条件的边:

(a) e_{i+1}与v_i关联

(b) 除非别无选择,否则e_{i+1}不是G_i中的桥

(3) 若$G_i\neq N_i$, 则回到(2); 否则算法停止

Fleury算法(递归形式)

- 算法:F(G,v)

(1) if d(v)>1 then e:=v关联的任意非割边

(2) else e:=v关联的唯一边

(3) u:=e的另一个端点.

(4) 递归地求G-e的从u到v的欧拉通路F(G-e,u)

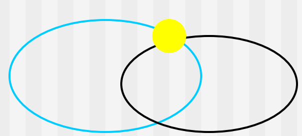
(5) 把e接续在递归求出的通路上

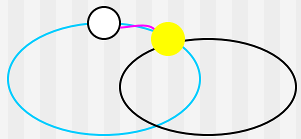
*Fleury算法(正确性证明)

- 定理8.5: 设G是无向欧拉图,则Fleury算法终止时得到的简单通路是欧拉回路

- 证明: (1) $P_m=v_0e_1v_1e_2\ldots e_mv_m$是回路.

  (2) P_m经过G中所有边 #

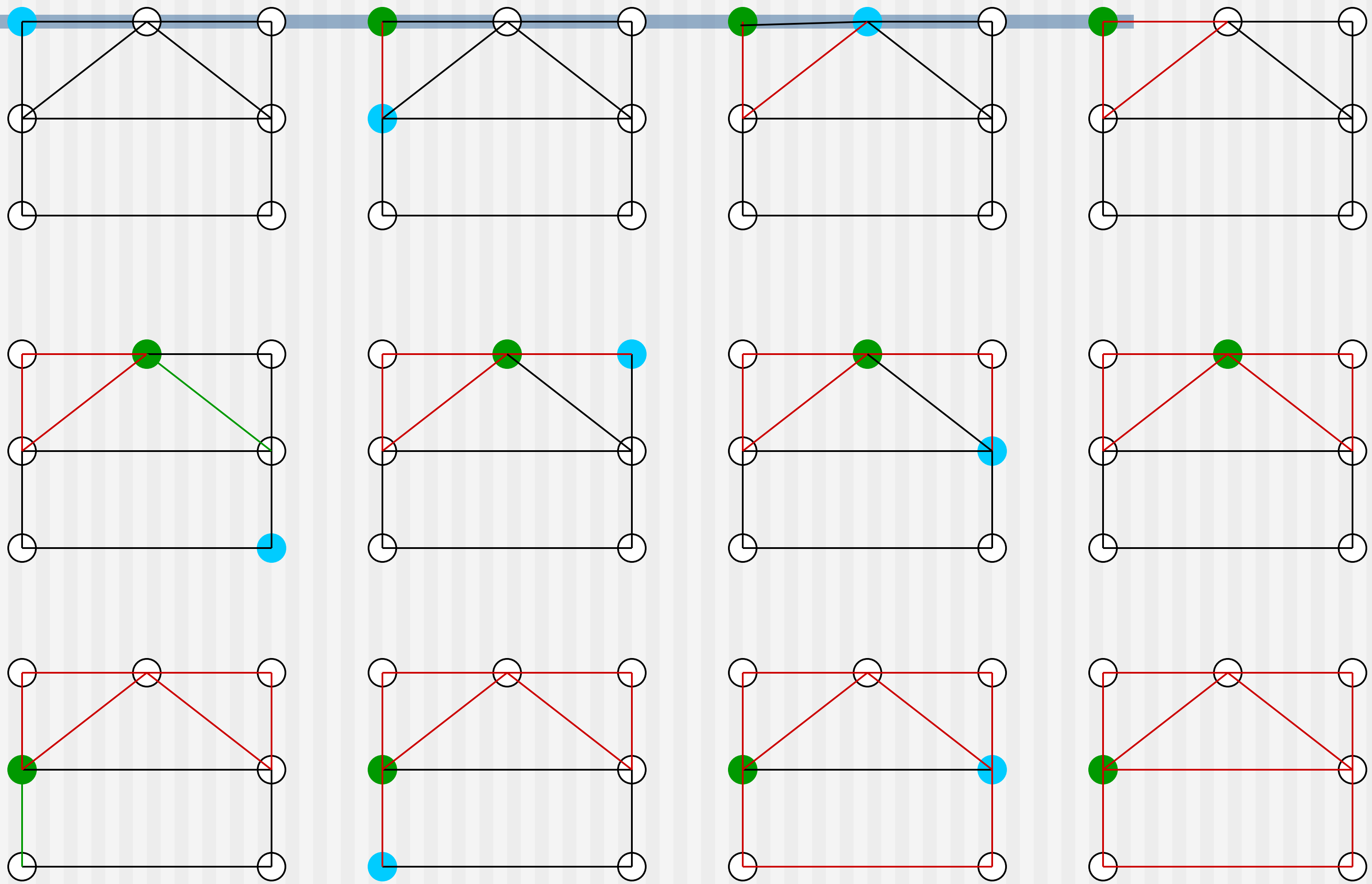




逐步插入回路算法

- 每次求出一个简单回路
- 把新求出的回路插入老回路，合并成一个更大的回路
- 直到得到欧拉回路或宣布失败

逐步插入回路算法(举例)



逐步插入回路算法

(0) $i:=0$, $v^*:=v$, $v:=v_1$, $P_0=v_1$, $G_0=G$.

(1) $e:=$ 在G_i中与v关联的任意边(v,v'),

$P_{i+1}:=$"P_i"ev'.

(2) if $v'\neq v^*$ then $i:=i+1$, $v=v'$, goto (1).

(3) if $E(P_{i+1})=E(G)$ then 结束

else $G_{i+1}:=G-E(P_{i+1})$,

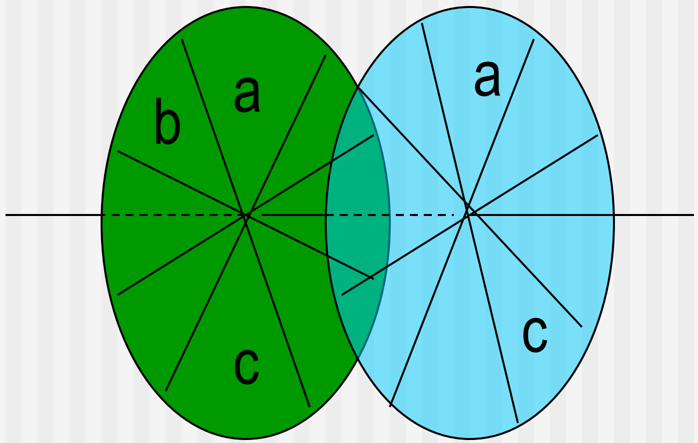
$e:=G_{i+1}$中与P_{i+1}上v_k关联的任意边,

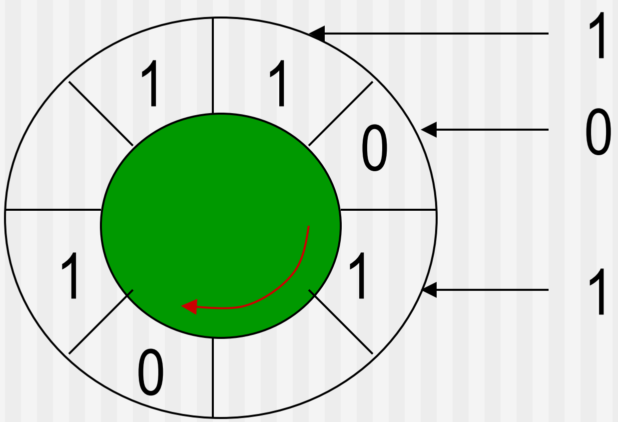
$P_{i+1}:= v_k\ldots v_k$.

$v^*:=v_k$, $v:=v_k$, $i:=i+1$, goto (1).

应用(轮盘设计)

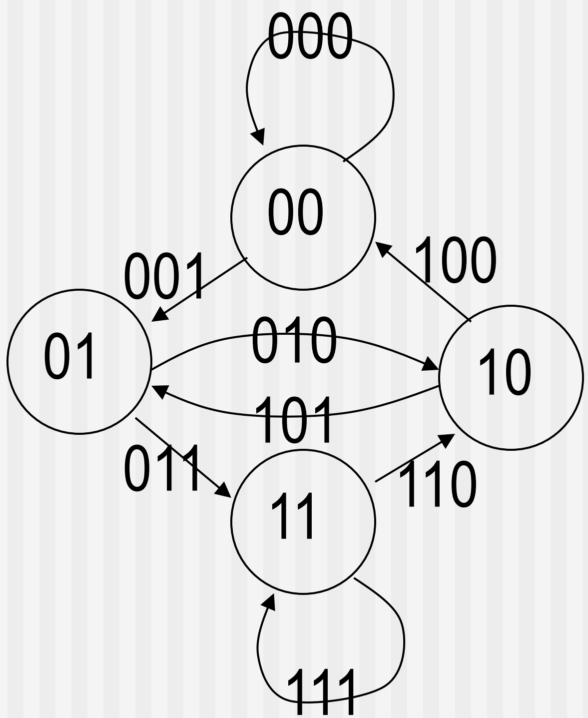
- 000,001,010,011,100,101,110,111

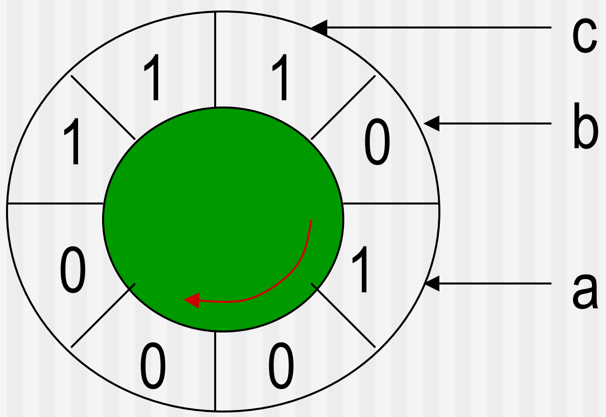




应用(轮盘设计)

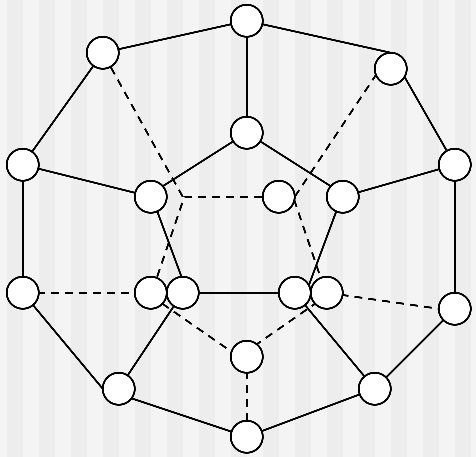
- $D=<V,E>$, $V=\{00,01,10,11\}$,
  $E=\{\ abc=<ab,bc>\ |\ a,b,c\in\{0,1\}\ \}$

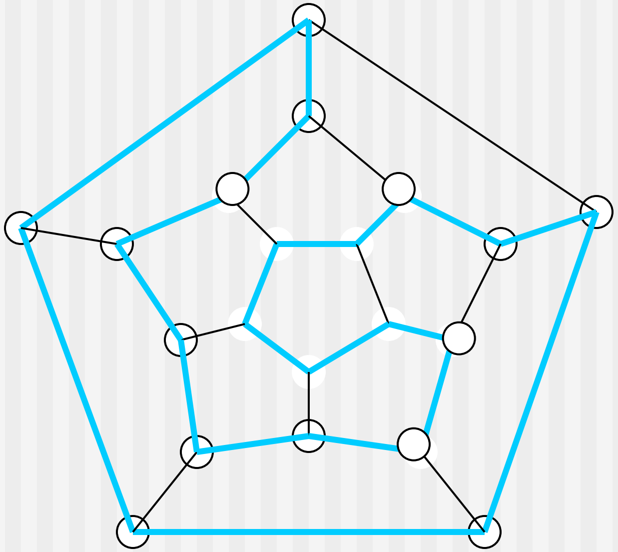




周游世界

- Sir William Rowan Hamilton, 1859, Icosian game:





Willam Rowan Hamilton

- Willam Rowan Hamilton(1805~1865):
  - 爱尔兰神童(child prodigy)
  - 三一学院(Trinity College)
  - 1827年敦辛克天文台的皇家天文研究员和三一学院的天文学教授

Willam Rowan Hamilton

- Willam Rowan Hamilton(1805~1865):
  - 光学
  - 力学
  - 四元数(quaternion): a+b**i**+c**j**+d**k**, 放弃乘法交换律!

哈密顿图(Hamilton)

- 哈密顿通路(Hamilton path): 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路(初级通路)
- 哈密顿回路(Hamilton circuit/cycle): 经过图中所有顶点的初级回路
- 哈密顿图(Hamiltonian):有哈密顿回路的图
- 半哈密顿图(semi-Hamiltonian):有哈密顿通路的图

无向哈密顿图的必要条件

- 定理8.6: 设G=<V,E>是无向哈密顿图,则对V的任意非空真子集V_1有

$$p(G-V_1)\le|V_1|$$

定理8.6 证明

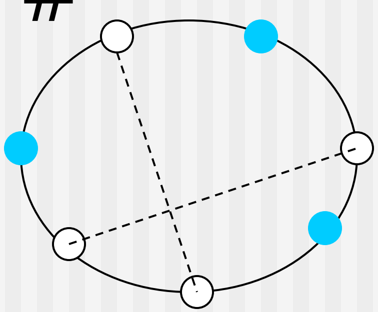
- 证明：设C是G中任意哈密顿回路，当V_1中顶点在C中都不相邻时，

$p(C-V_1)=|V_1|$最大；

否则，$p(C-V_1)<|V_1|$.

因为C是G的生成子图，

所以$p(G-V_1)\le p(C-V_1)\le|V_1|$. #

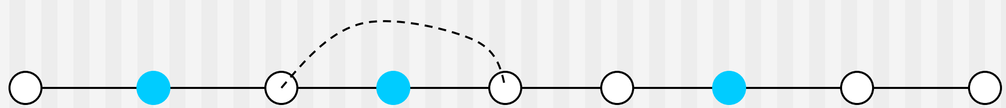


无向半哈密顿图的必要条件

- 推论：设G=<V,E>是无向半哈密顿图,则对V的任意非空真子集V_1有

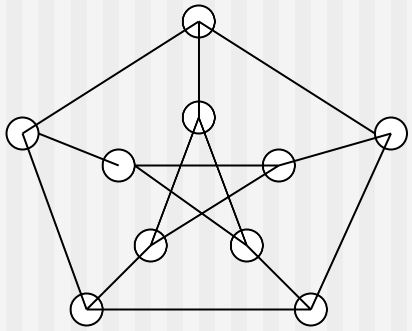
$$p(G-V_1)\le|V_1|+1$$

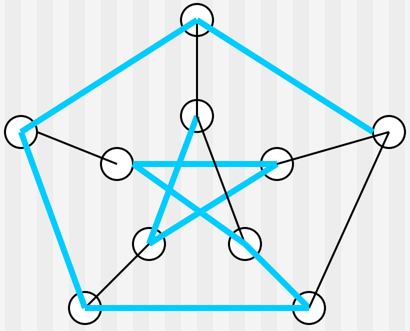
- 证明：设P是G中任意哈密顿通路，当V_1中顶点都在P内部且都不相邻时，$p(P-V_1)= |V_1|+1$最大；否则，$p(P-V_1)\le|V_1|$. P是G的生成子图，所以$p(G-V_1)\le p(P-V_1)\le|V_1|+1$. #



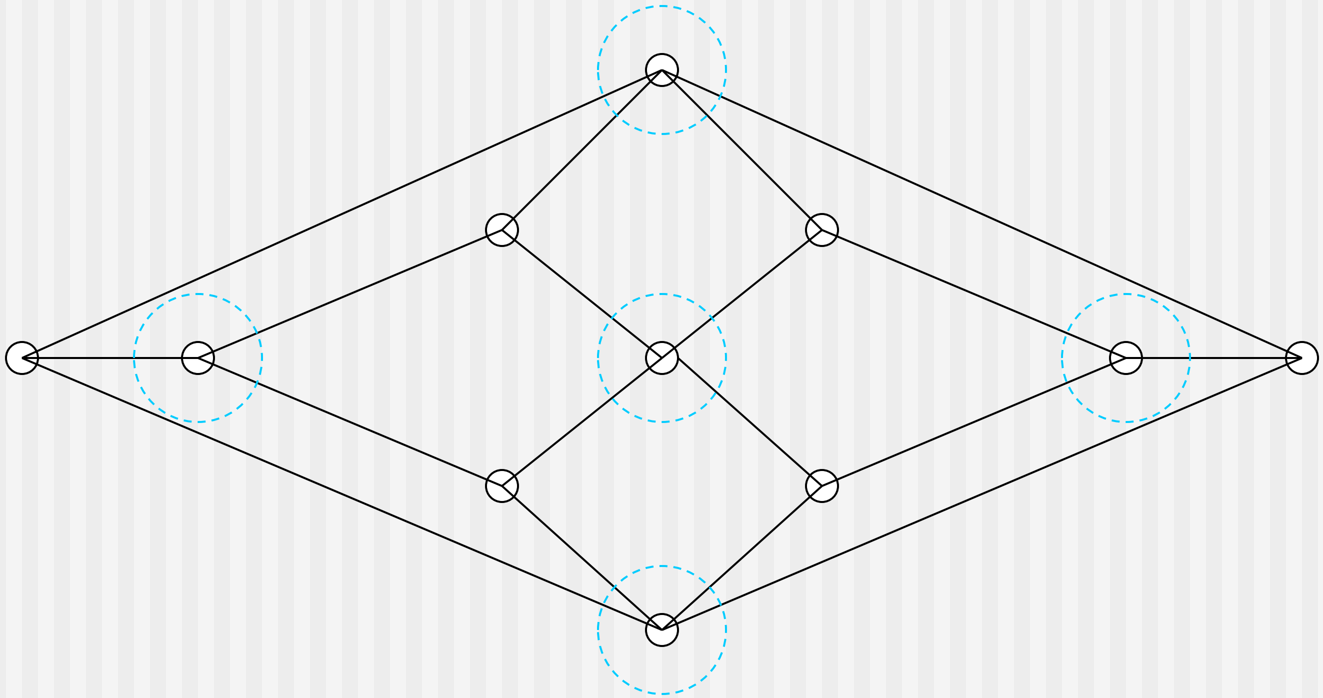
定理8.6说明

- 上述条件只是必要条件,而不是充分条件
- 满足条件的图不一定是哈密顿图，反例: Petersen图
  - Petersen图满足: $\forall V_1 \neq \varnothing$, $p(G-V_1) \leq |V_1|$
  - Petersen图不是哈密顿图: 穷举
  - Petersen图是半哈密顿图

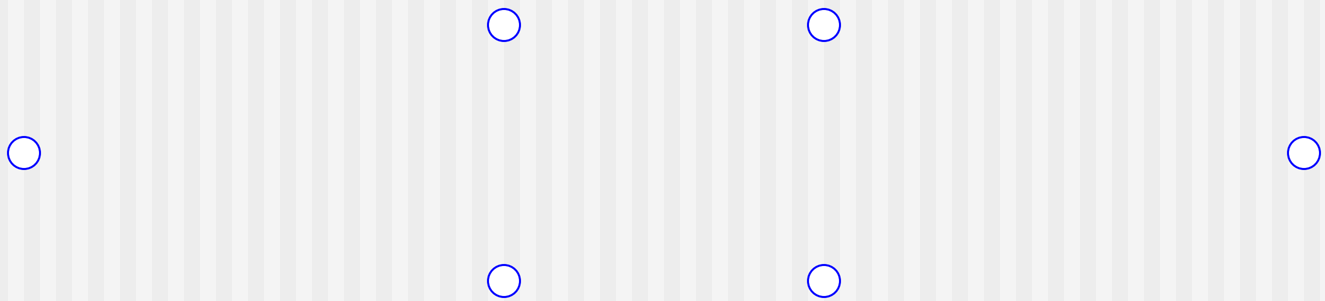




举例:判断是否哈密顿图



举例(续)



$p(G-V_1)=6$ $|V_1|=5$

无向半哈密顿图的充分条件

- 定理8.7：设G是n(≥2)阶无向简单图，若对G中任意不相邻顶点u与v有

$$d(u)+d(v)\geq n-1$$

则G是半哈密顿图.

定理8.7 证明

证明思路:

(1) G连通

(2) 由极大路径得圈

(3) 由圈得更长路径

路径--极大路径--圈--更长路径

---更长极大路径--更长圈--更长路径--……--哈密顿通路

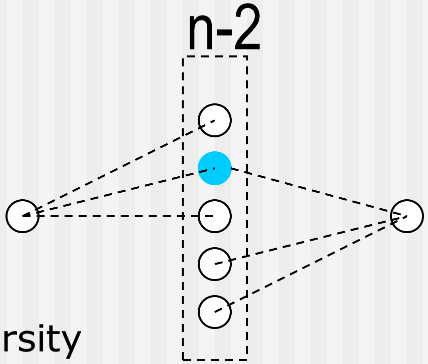
定理8.7 (证明(1))

- 证明: (1) 如果G不连通,则至少有两个连通分支G_1,G_2,顶点数分别为n_1,n_2,设$u\in V(G_1)$, $v\in V(G_2)$,因为G是简单图,则

$$d_G(u)+ d_G(v)= d_{G1}(u)+ d_{G2}(v)$$

$\le n_1-1+n_2-1 \le n-2$ 与已知矛盾!

所以G连通。



定理7(证明(2))

- 证明: (2) 由极大路径得圈: 设极大路径

$\Gamma=v_1\ldots v_l$, $l\le n$.

(2a) $l=n$,则Γ为哈密顿通路;

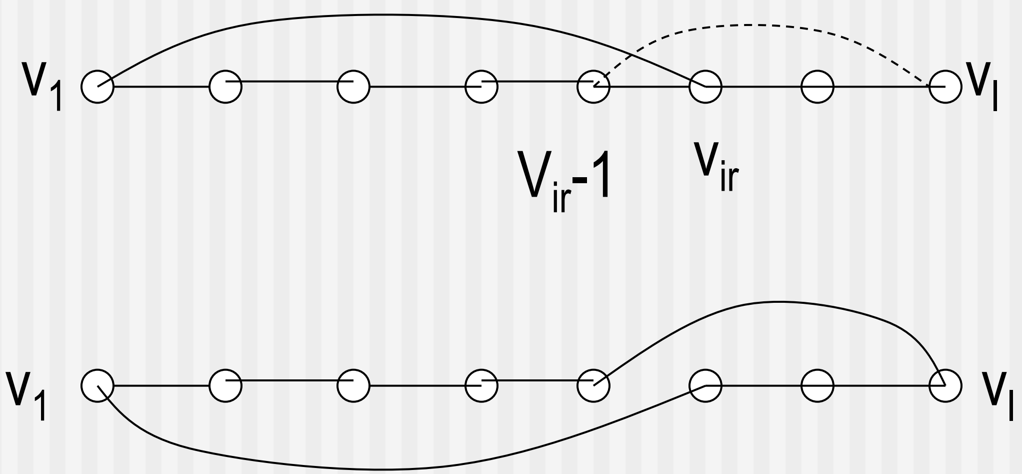
(2b)$l<n$,若v_1和v_l相邻,则Γ为圈;若v_1和v_l不相邻,设v_1与 $v_{i1}=v_2$, v_{i2},…, v_{ik}相邻,则$k\ge 2$.

因为$k=1$,则$d(v_1)+d(v_l)=1+l-2=l-1<n-1$ 矛盾!

v_l必与v_{i2},…, v_{ik}左相邻顶点v_{i2-1},…, v_{ik-1}之一相邻,否则 $d(v_1)+d(v_l)=k+l-2-(k-1)=l-1 <n-1$ 矛盾!

设v_l与v_{ir-1}相邻,删除边(v_{ir-1} ,v_{ir}),得圈.

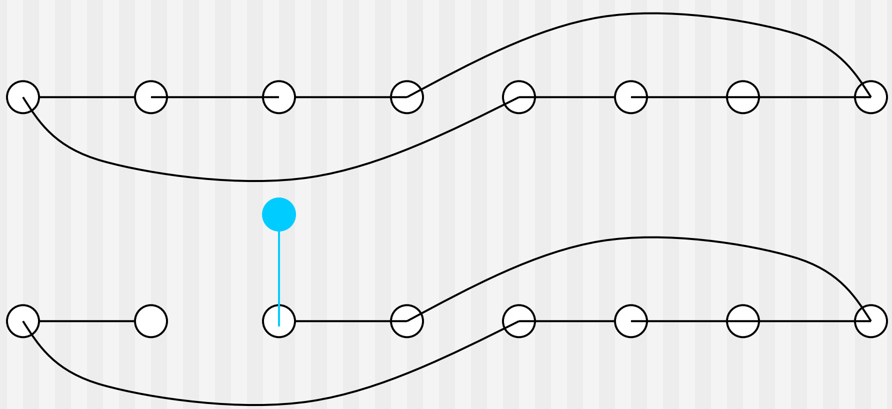
定理7(证明(2))



定理8.7 (证明(3))

- 证明:(3) 证明存在比Γ更长的路经:由圈得更长路径

因为G的连通性,所以存在C外的顶点与C上顶点相邻,设 $v_{l+1} \in V(G)-V(C)$,且与C上顶点v_t相邻,删除边(v_{t-1}, v_t)得顶点数为l+1的路径Γ‘



对Γ‘重复(1)-(3),因为G为有限图,有限步中一定得G中的哈密顿路。

无向哈密顿图的充分条件

- 推论1: 设G是n(≥3)阶无向简单图,若对G中任意不相邻顶点u与v有

$$d(u)+d(v)\geq n$$

则G是哈密顿图.

- 证明: 由定理8.7知,G连通且有哈密顿通路$\Gamma=v_1\ldots v_n$. (1) 若$(v_1,v_n)\in E$,则得哈密顿回路$C=v_1\ldots v_n v_1$. (2) 若$(v_1,v_n)\notin E$,则与定理8.7证明类似,存在过$v_1\ldots v_n$的圈,此圈为G中的哈密顿回路. #

无向哈密顿图的充分条件

- 推论2：设G是n(≥3)阶无向简单图,若对G中任意顶点v有

$$d(v) \geq n/2$$

则G是哈密顿图.
- 证明：由推论1. #

定理8.8

- 定理8.8: 设u,v是无向n阶简单图G中两个不相邻顶点,且$d(u)+d(v)\geq n$, 则

  $$G\text{是哈密顿图} \Leftrightarrow G\cup(u,v)\text{是哈密顿图}.$$

证明: ($\Rightarrow$)显然

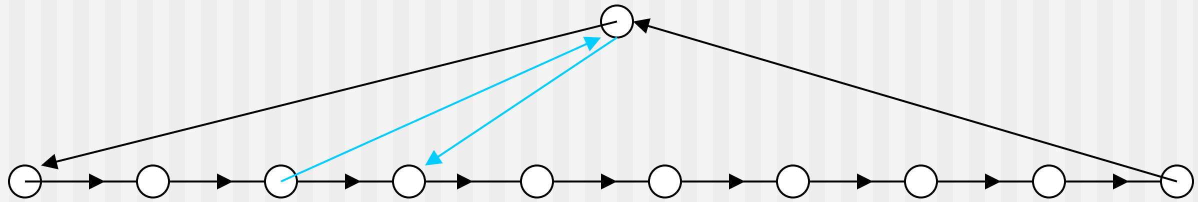
($\Leftarrow$) 设C是$G\cup(u,v)$中的哈密顿回路.

(1) C不经过(u,v): C是G中哈密顿回路.

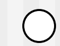
(2) C经过(u,v): C-(u,v)是G中哈密顿通路, 与定理8.7证明类似,证明存在过C各个顶点的圈, G中有哈密顿回路. #

有向半哈密顿图的充分条件

- 定理8.9：设D是n(≥2)阶竞赛图，则D是半哈密顿图．　#
- 推论：设D是n阶有向图，若D含n阶竞赛图作为子图，则D是半哈密顿图．　#



有向哈密顿图的充分条件

- 定理8.10: 强连通的竞赛图是哈密顿图.
- 证明: n=1时,平凡图是哈密顿图. 

n=2时,不可能强连通. 

下面设n≥3.

(1) D中存在长度为3的圈.

(2) D中存在长度为k的圈 ⇒ D中存在长度为k+1的圈.

定理8.10(证明(1))

- 证明(续): (1) D中存在长度为3的圈.

  $\forall v \in V(D)$, 考虑v的前驱集与后继集

$\Gamma_D^-(v) = \{ u \in V(D) \mid \langle u,v \rangle \in E(D) \}$

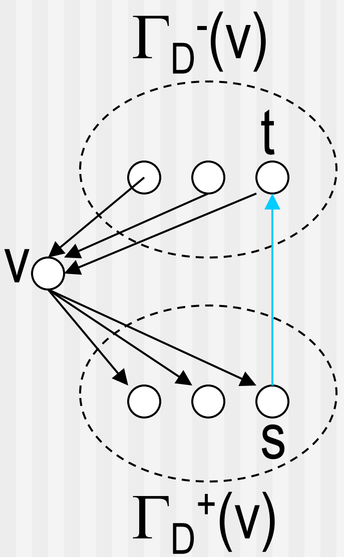
$\Gamma_D^+(v) = \{ u \in V(D) \mid \langle v,u \rangle \in E(D) \}$.

D强连通竞赛图, 所以$\Gamma_D^-(v) \neq \varnothing$,

$\Gamma_D^+(v) \neq \varnothing$, $\Gamma_D^-(v) \cup \Gamma_D^+(v) = V(D) - \{v\}$,

$\exists s \in \Gamma_D^+(v)$, $\exists t \in \Gamma_D^-(v)$, $\langle s,t \rangle \in E(D)$.

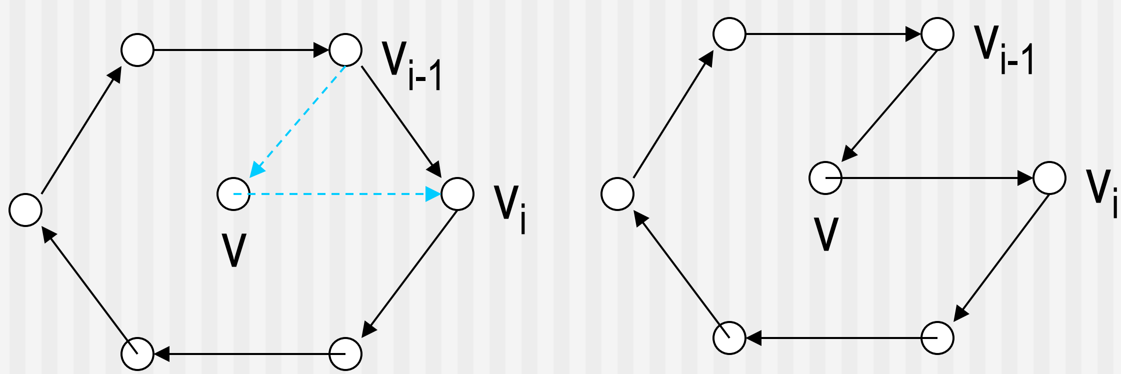
于是C=vstv是长度为3的圈.



定理8.10(证明(2))

- 证明(续)： (2) D中存在长度为k的圈 $\Rightarrow$ D中存在长度为k+1的圈： 设D中长度为k $(3 \le k \le n)$ 的圈$C=v_1v_2\ldots v_kv_1$.

  (2a) 若存在C外顶点$v \in V(D-C)$,既有C上的顶点邻接到v,又有C上的顶点邻接于v,则C上一定存在顶点v_i,使得$<v_{i-1},v> \in E(D)$,$<v,v_i> \in E(D)$.则 $C'=v_1v_2\ldots v_{i-1}vv_i\ldots v_kv_1$是长度为k+1的圈.



定理10(证明(2b))

- 证明(续): (2b) C外的任何顶点v,或者邻接到C上的所有顶点,或者邻接于C上的所有顶点, 令

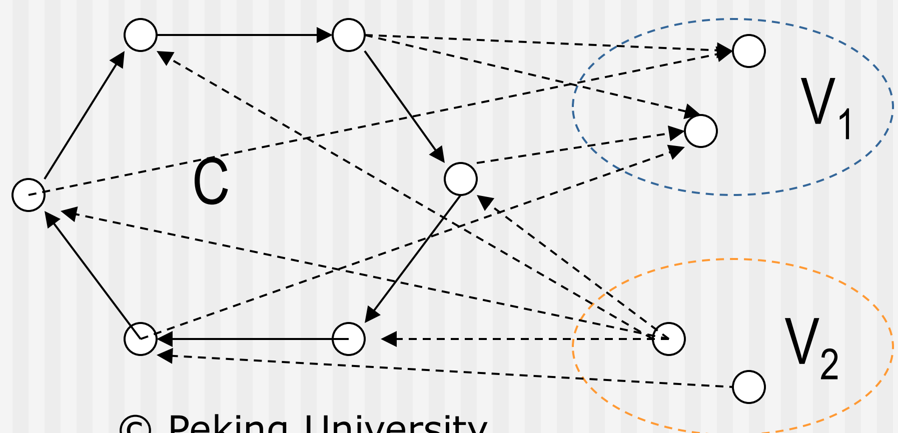
$V_1=\{v\in V(D-C) \mid \forall u\in V(C), <u,v>\in E(D) \}$,

$V_2=\{v\in V(D-C) \mid \forall u\in V(C), <v,u>\in E(D) \}$, 则

$V_1\neq\varnothing$,

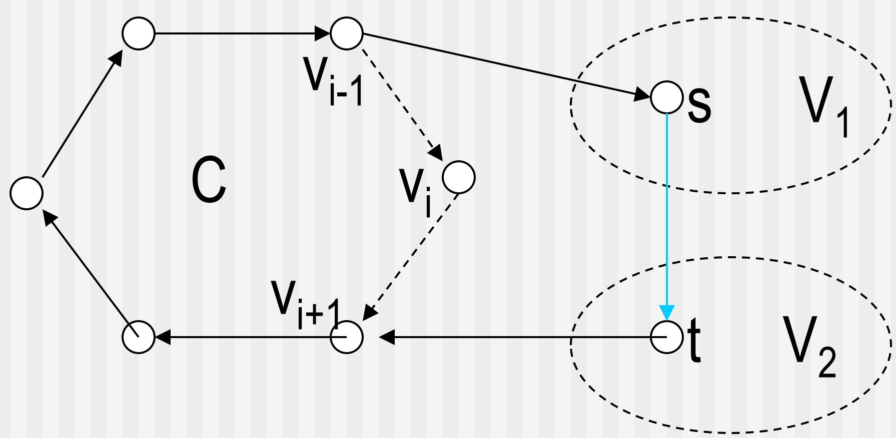
$V_2\neq\varnothing$,

$V_1\cap V_2 = \varnothing$.



定理10(证明(2b))

- 证明(续): (2b) 于是$\exists s\in V_1$, $\exists t\in V_2$, $<s,t>\in E(D)$. 在C上任取相邻3点v_{i-1},v_i,v_{i+1}, 则$C'=v_1v_2\ldots v_{i-1}stv_{i+1}\ldots v_kv_1$ 是长度为k+1的圈. #

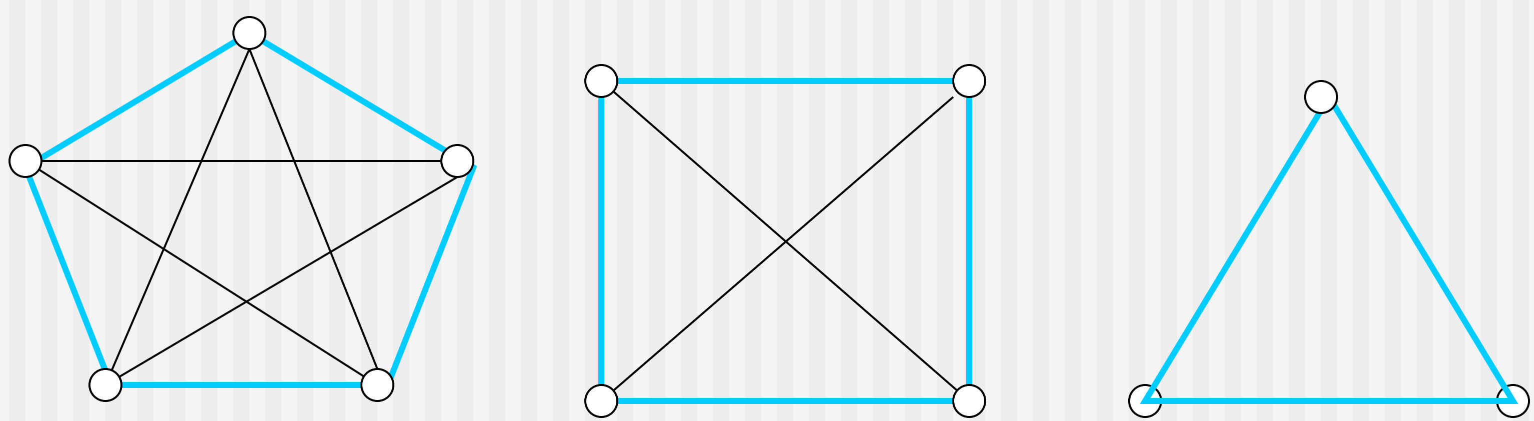


推论

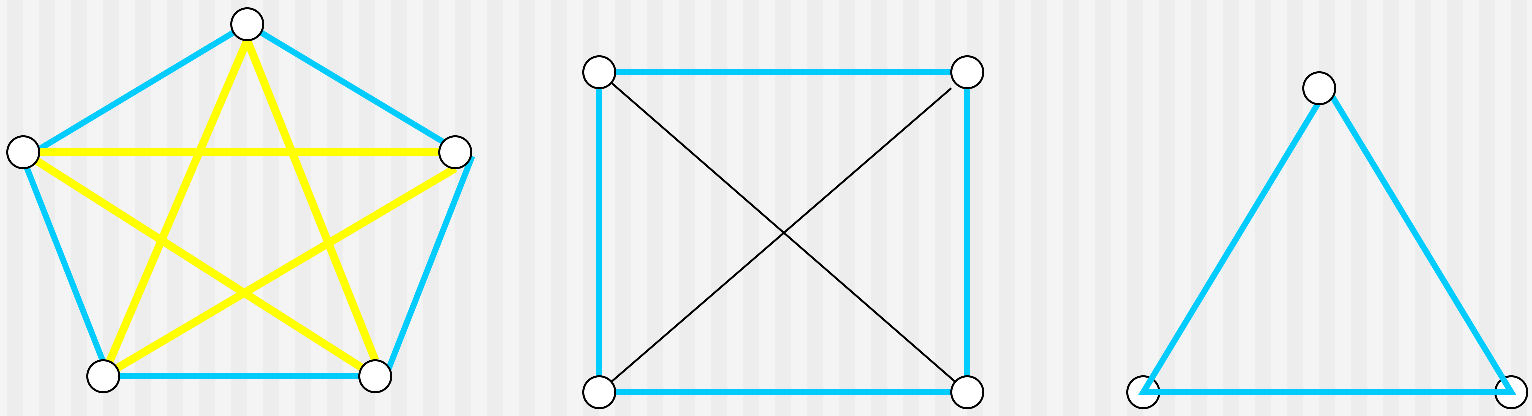
- 推论:设D是n阶有向图, 若D含n阶强连通竞赛图作为子图, 则D是哈密顿图. #

边不重的哈密顿回路

- 边不重的哈密顿回路: 设C_1与C_2都是图G的哈密顿回路, 若$E(C_1)\cap E(C_2)=\varnothing$, 则称它们为边不重的哈密顿回路.
- 问题: $K_n(\geq 3)$中同时存在多少条边不重的哈密顿回路?



- 问题: $K_n(\geq 3)$中同时存在多少条边不重的哈密顿回路?



定理8.11

- 定理8.11: 完全图K_{2k+1}(k≥1)中同时有k条边不重的哈密顿回路,且这k条边不重的哈密顿回路含K_{2k+1}中所有边

定理8.11(证明)

- 证明：设$V(K_{2k+1})=\{v_1,v_2,\ldots,v_{2k+1}\}$, 对$i=1,2,\ldots,k$, 令

$$P_i=v_iv_{i-1}v_{i+1}v_{i-2}v_{i+2}\cdots v_{i-(k-1)}v_{i+(k-1)}v_{i-k},$$

把下标按mod(2k)转换到{1,2,...,2k}中，0转换成2k, 令$C_i=v_{2k+1}P_iv_{2k+1}$.

可以证明：C_i都是哈密顿回路;

$$E(C_i)\cap E(C_j)=\varnothing \ (i\neq j);$$

$$\cup_{i=1}^{n}E(C_i)=E(K_{2k+1}). \quad \#$$

$P_i=v_iv_{i-1}v_{i+1}v_{i-2}v_{i+2}\ldots v_{i-(k-1)}v_{i+(k-1)}v_{i-k}$,

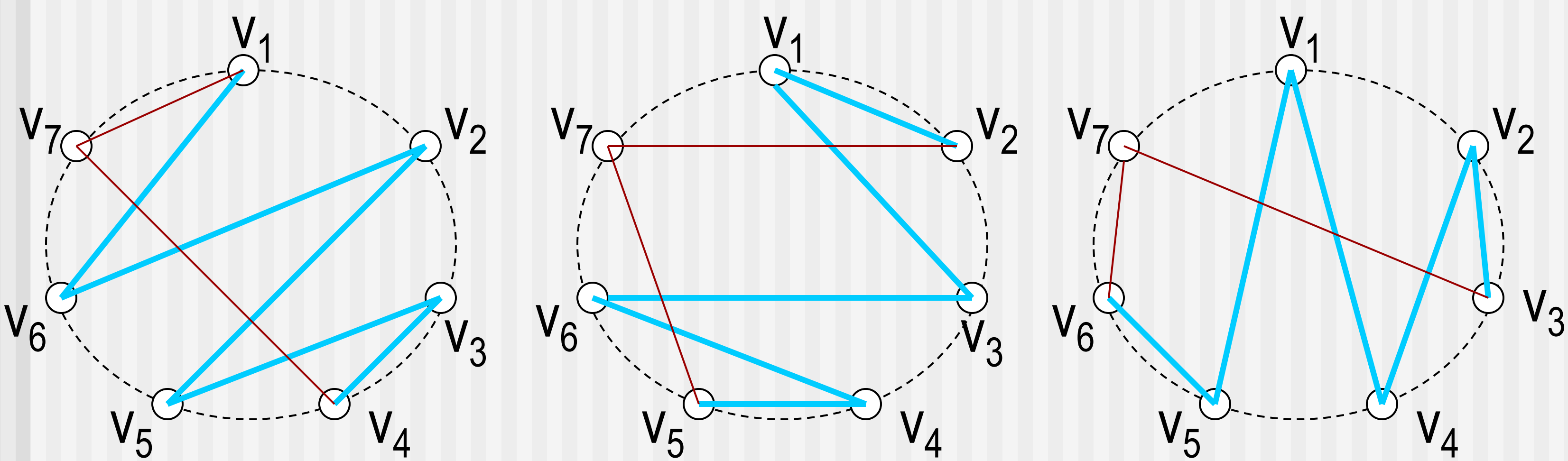
定理11(举例)

- K_7: $V(K_7)=\{v_1,v_2,\ldots,v_7\}$, k=3, mod 6,

$P_1=v_1v_0v_2v_{-1}v_3v_{-2}=v_1v_6v_2v_5v_3v_4$,

$P_2=v_2v_1v_3v_0v_4v_{-1}=v_2v_1v_3v_6v_4v_5$,

$P_3=v_3v_2v_4v_1v_5v_0=v_3v_2v_4v_1v_5v_6$,



推论

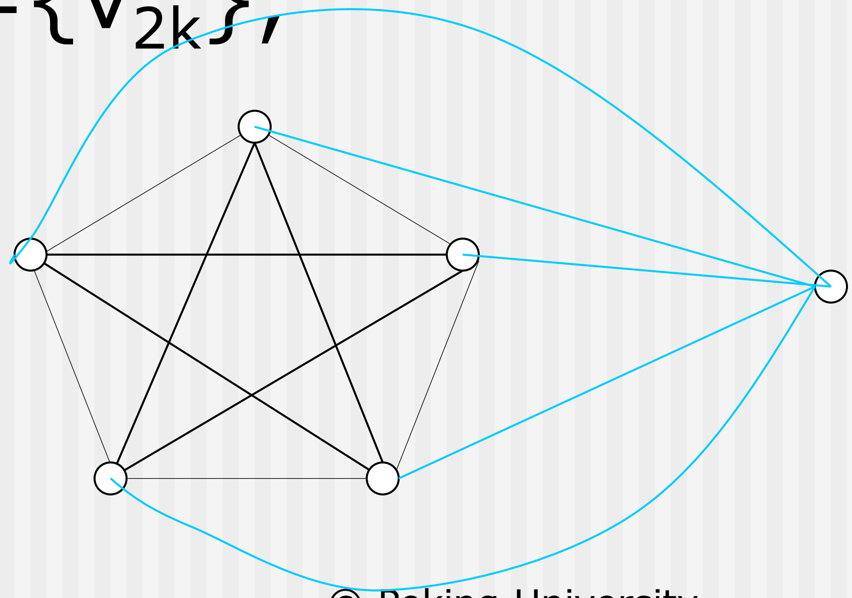
- 推论：完全图$K_{2k}(k\geq 2)$中同时有k-1条边不重的哈密顿回路,并且删除这k-1条哈密顿回路的所有边后，剩下的是k条彼此不相邻的边

推论(证明)

- 证明: $k=2$时, K_4显然. 下面设$k\geq 3$.

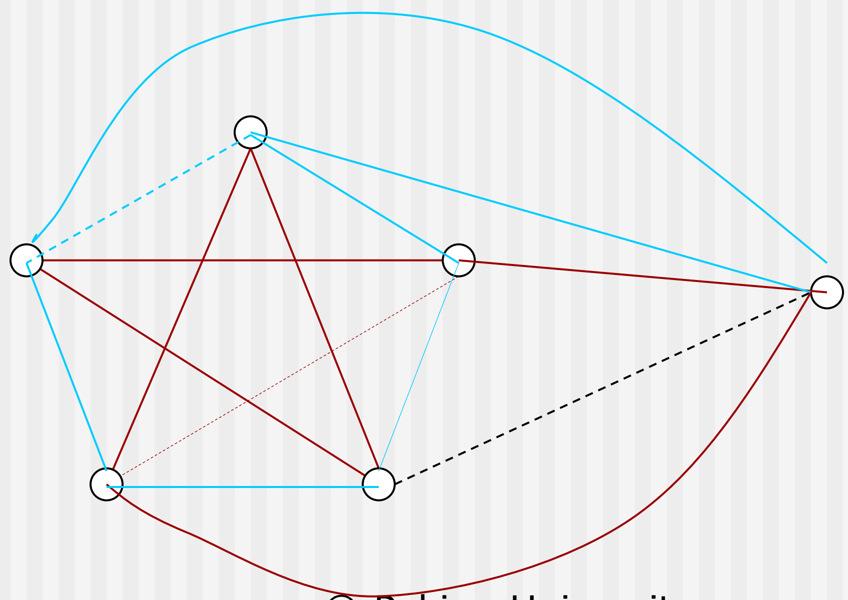
$$K_{2k} = K_{2(k-1)+1} + K_1 \quad (\text{联图})$$

设$V(K_{2(k-1)+1})=\{v_1,v_2,\ldots,v_{2k-1}\}$, $V(K_1)=\{v_{2k}\}$,



推论(证明)

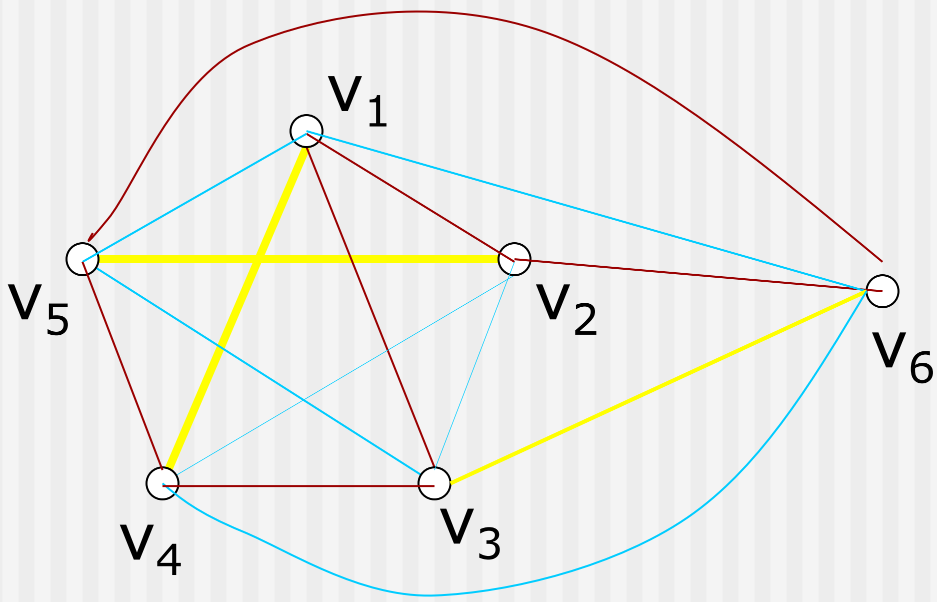
- 证明: 由定理11, K_{2k-1}中有k-1条边不重的哈密顿回路,设为C'_1,C'_2,…,C'_{k-1}, 依次把v_{2k}"加入" C'_i,得到满足要求的C_i. #



例

$C_1' = v_5 v_1 v_4 v_2 v_3 v_5$ $C_1 = v_5 v_1 v_6 v_4 v_2 v_3 v_5$

$C_2' = v_5 v_2 v_1 v_3 v_4 v_5$ $C_2 = v_5 v_6 v_2 v_1 v_3 v_4 v_5$



总结

- 欧拉图
  - 七桥问题,一笔画,欧拉通(回)路,欧拉图
  - 判定欧拉图的充分必要条件
  - 求欧拉回路的算法
- 哈密顿图
  - 周游世界,哈密顿通(回)路,哈密顿图
  - 判定哈密顿图的必要条件
  - 判定哈密顿图的充分条件
  - 边不重的哈密顿回路

作业

- P142：4，7, 13