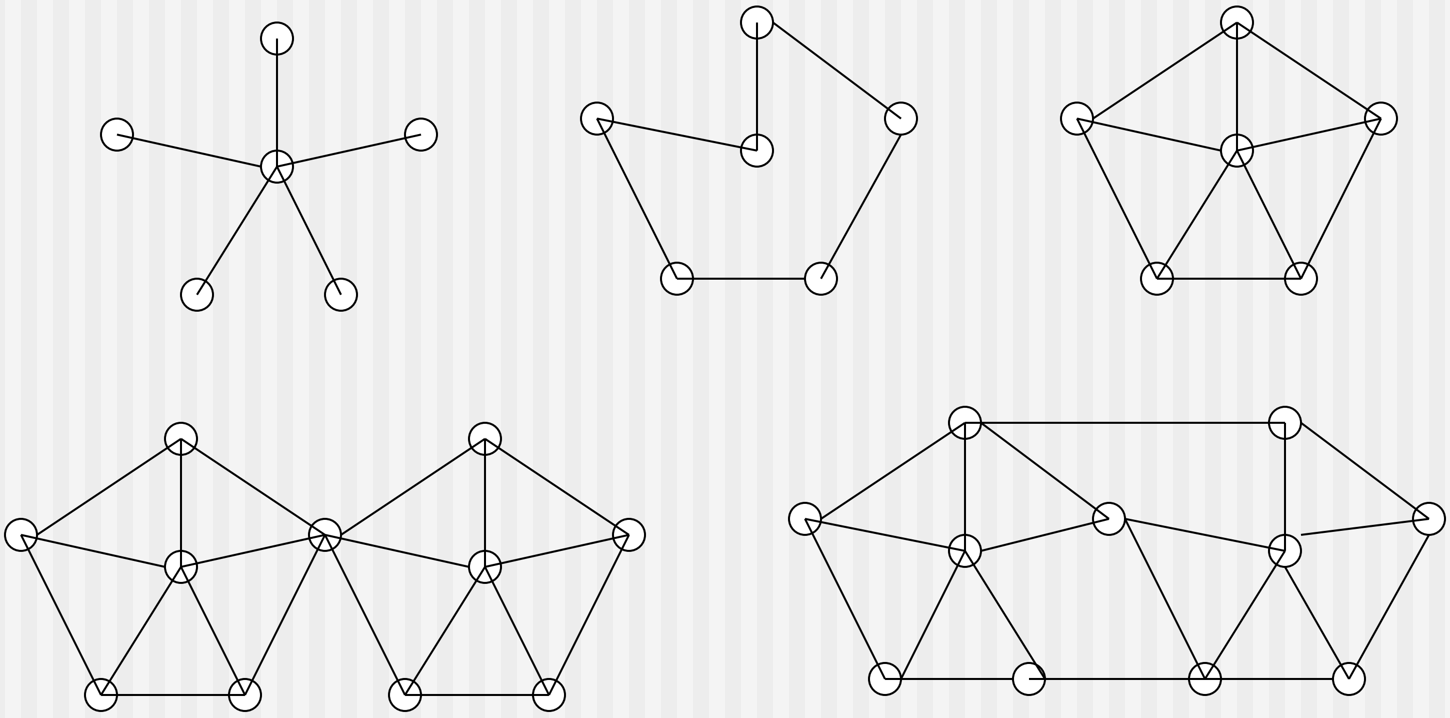
第7章 图

- 7.1 图的基本概念
- 7.2 通路与回路
- 7.3 无向图的连通性
- 7.4 无向图的连通度
- 7.5 有向图的连通性

如何刻画连通程度？

- 如何定量比较无向图连通性的强与弱?



如何定义连通度

- 点连通度: 为了破坏连通性,至少需要删除多少个顶点?
- 边连通度: 为了破坏连通性,至少需要删除多少条边?
- "破坏连通性",即"变得更加不连通"
  - $p(G-V')>p(G)$
  - $p(G-E')>p(G)$

割集(cutset)

- 点割集(vertex cut)
- 割点(cut vertex)
- 边割集(edge cut)
- 割边(cut edge)(桥)(bridge)

点割集(vertex cutset)

- 点割集: 无向图$G=\langle V,E\rangle$, $\varnothing \neq V' \subset V$, 满足

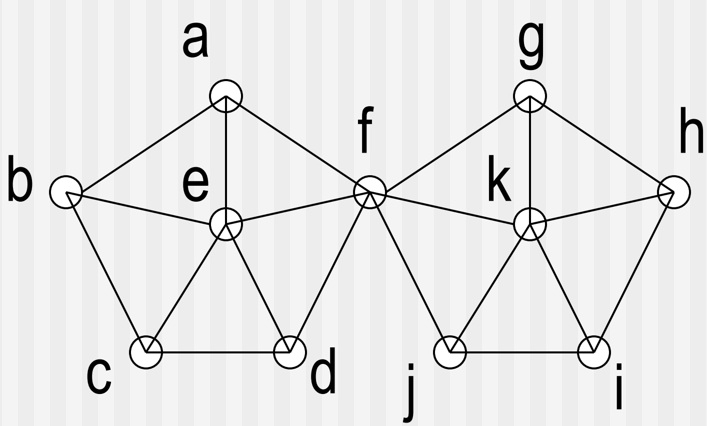
  (1) $p(G-V')>p(G)$;

  (2) 极小性: $\forall V'' \subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$,

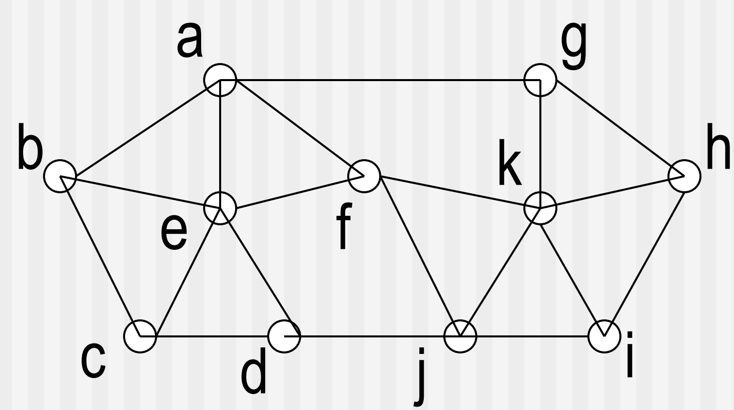
则称V'为点割集.

点割集(举例)

- G_1: {f},{a,e,c},{g,k,j},~~{b,e,f,k,h}~~
- G_2: ~~{f}~~,{a,e,c},{g,k,j},{b,e,f,k,h}



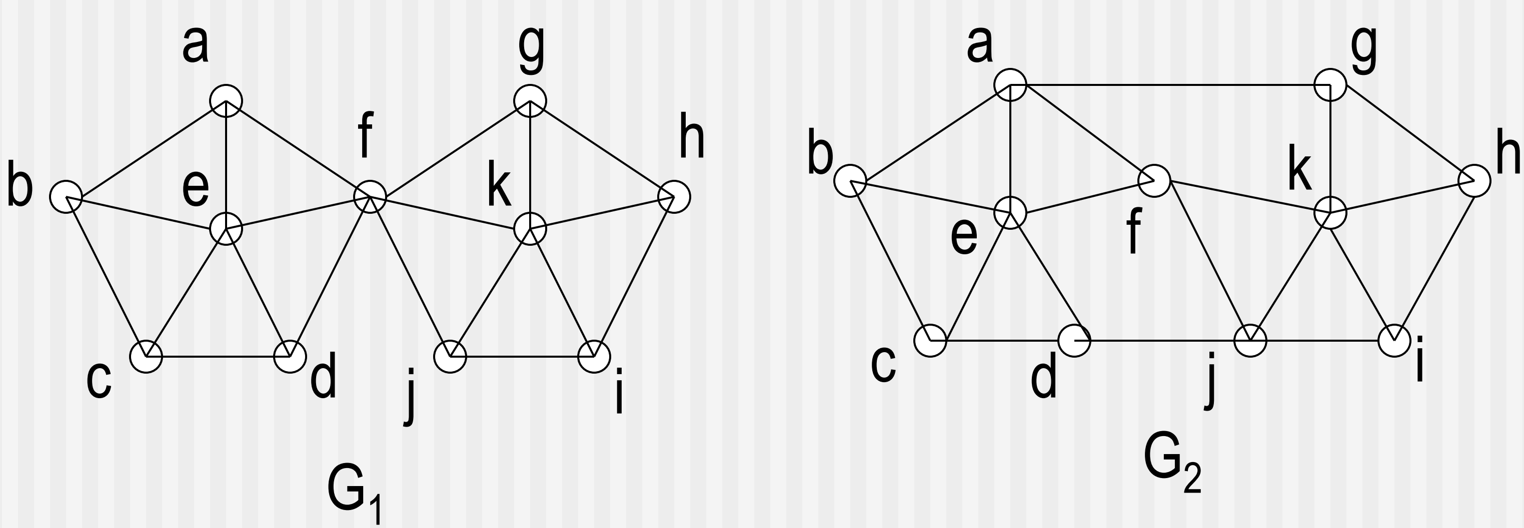
G_1



G_2

割点(cut-point / cut-vertex)

- 割点: v是割点 ⇔ {v}是割集
- 例: G_1中f是割点, G_2中无割点



边割集(edge cutset)

- 边割集: 无向图$G=\langle V,E\rangle$, $\emptyset \neq E' \subset E$, 满足

  (1) $p(G-E')>p(G)$;

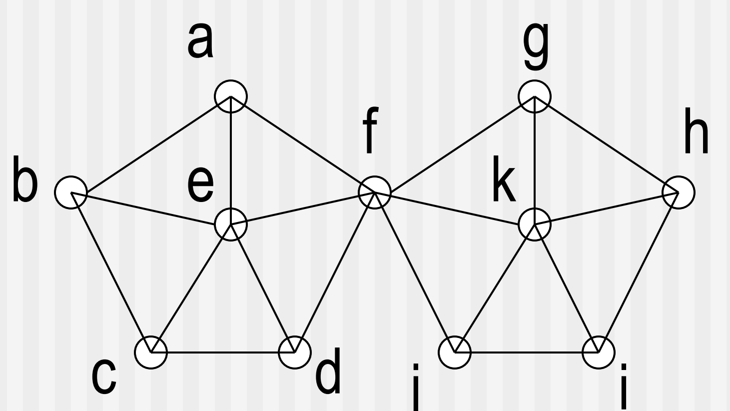
  (2) 极小性: $\forall E'' \subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$,

则称E'为边割集.

边割集(举例)

- G_1: {(a,f),(e,f),(d,f)}, {(f,g),(f,k),(j,k),(j,i)}

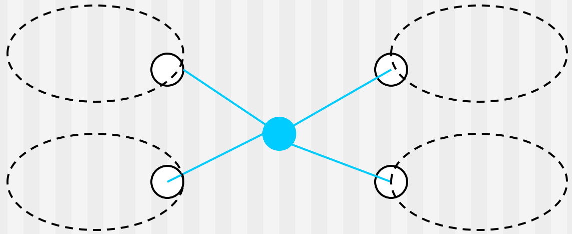
{~~(a,f),(e,f),(d,f),(f,g),(f,k),(f,j)~~}, ~~{(c,d)}~~

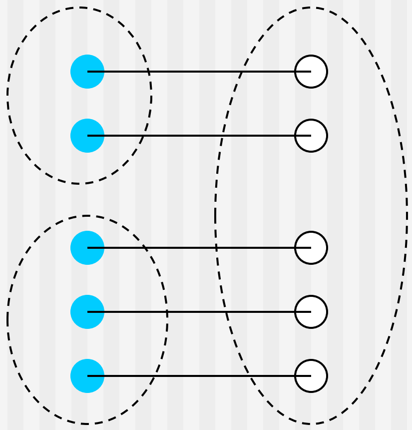


G_1

边割集性质

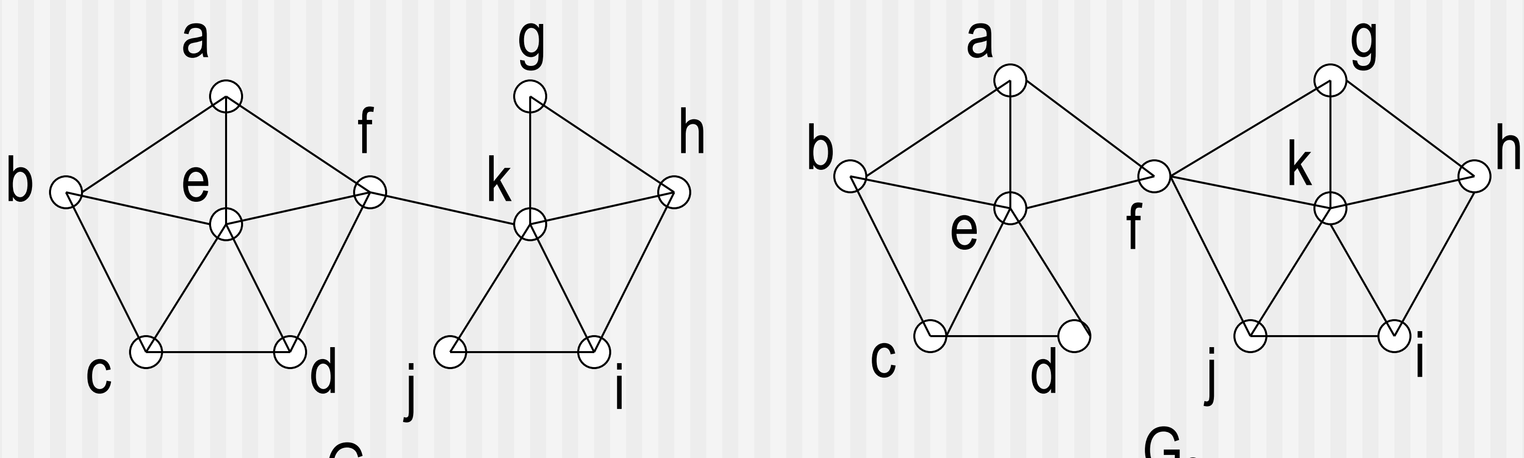
- 设E’是边割集,则p(G-E’)=p(G)+1.
- 证明: 如果p(G-E’)>p(G)+1, 则E’的子集可以使P(G)不连通，因为不满足定义中的极小性， E’不是边割集. #
- 说明: 点割集无此性质





割边(cut-edge)(桥)

- 割边: (u,v)是割边 ⇔ {(u,v)}是边割集
- 例: G_1中(f,k)是桥, G_2中无桥



G_1 G_2

扇形割集(fan cutset)

- 扇形割集: E'是边割集$\wedge$E'$\subseteq I_G(v)$
- $I_G(v)$不一定是边割集(不一定极小)
- $I_G(v)$不是边割集 $\Leftrightarrow$ v是割点

如何定义连通度

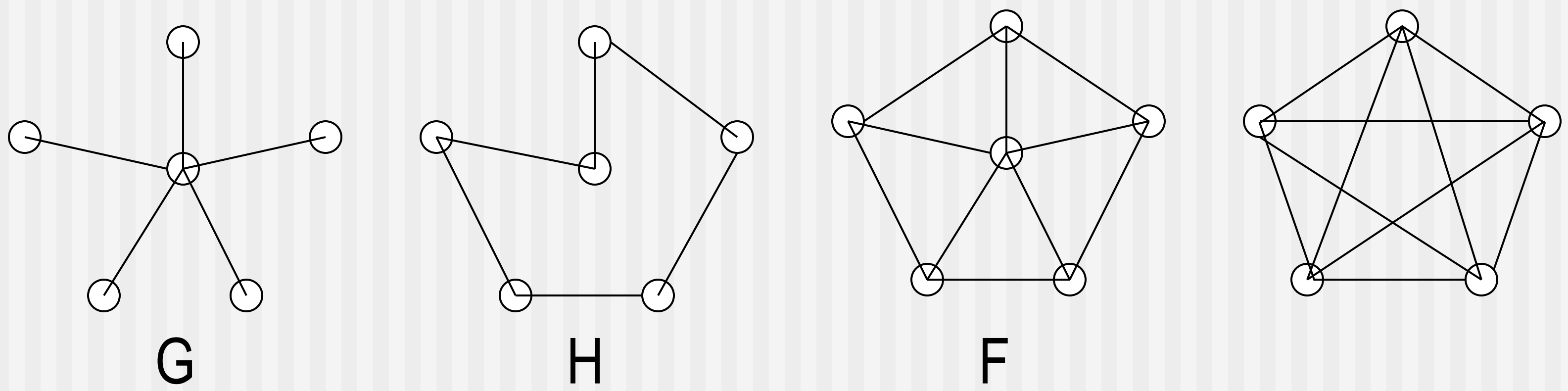
- 点连通度: 为了破坏连通性,至少需要删除多少个顶点?
- 边连通度: 为了破坏连通性,至少需要删除多少条边?

点连通度(vertex-connectivity)

- 点连通度: G是无向连通非完全图,
  $\kappa(G) = \min\{\ |V'|\ |\ V'$是G的点割集 $\}$
- 规定:
  - $\kappa(K_n) = n-1$
  - G非连通: $\kappa(G)=0$

点连通度(vertex-connectivity)

- 例: $\kappa(G)=1$, $\kappa(H)=2$, $\kappa(F)=3$, $\kappa(K_5)=4$

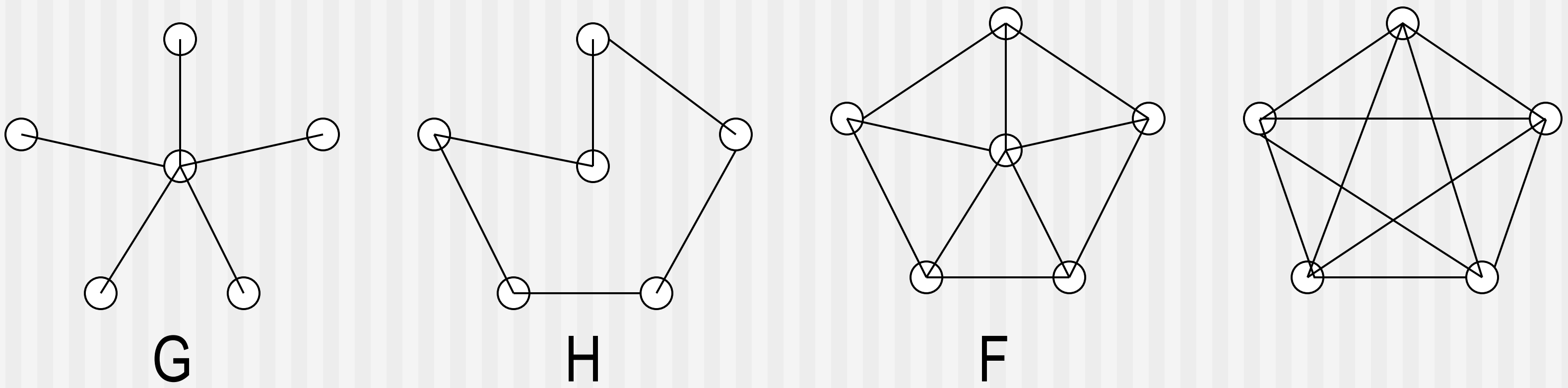


边连通度(edge-connectivity)

- 边连通度: G是无向连通图,
  $\lambda(G) = \min\{\ |E'|\ |\ E'是G的边割集\ \}$
- 规定:
  - G非连通: $\lambda(G)=0$

边连通度(edge-connectivity)

- 例: $\lambda(G)=1$, $\lambda(H)=2$, $\lambda(F)=3$, $\lambda(K_5)=4$

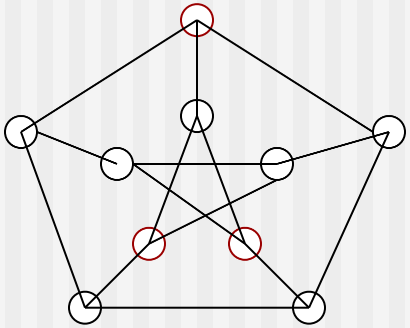


k-连通图, k-边连通图

- k-连通图(k-connected): $\kappa(G)\geq k$
- k-边连通图(k-edge-connected): $\lambda(G)\geq k$

k-连通图, k-边连通图

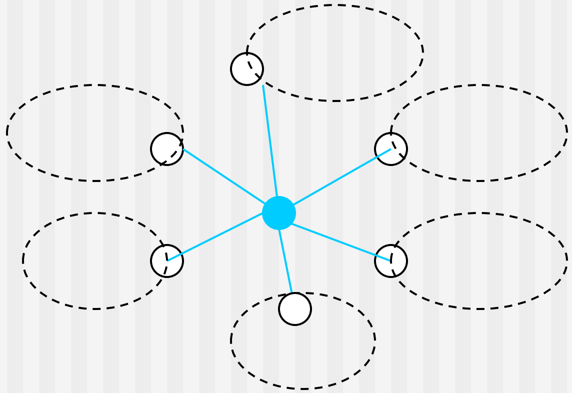
- 例: 彼得森图 $\kappa=3$, $\lambda=3$; 它是1-连通图, 2-连通图,3-连通图, 但不是4-连通图; 它是1-边连通图, 2-边连通图,3-边连通图,但不是4-边连通图



思考题：3-正则图，$\kappa=\lambda$

Whitney定理

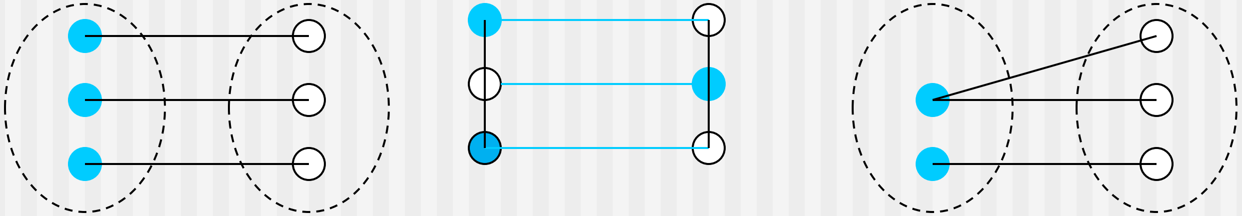
- 定理3.10: $\kappa \le \lambda \le \delta$.
- 证明: 不妨设G是3阶以上连通简单非完全图. 证$\lambda \le \delta$: 设$d(v)=\delta$, 则$|I_G(v)|=\delta$, $I_G(v)$中一定有边割集E', 所以$\lambda \le |E'| \le |I_G(v)|=\delta$.



Whitney定理(续)

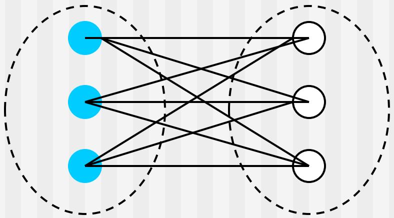
思路:

证$\kappa\leq\lambda$: 设E'是边割集,|E'|=λ,从V(E')中找出点割集V',使得|V'|$\leq\lambda$, 所以$\kappa\leq$|V'|$\leq\lambda$.



引理

- 引理:设E'是非完全图G的边割集, $\lambda(G)=|E'|$,G-E'的2个连通分支是G_1,G_2,则存在$u\in V(G_1),v\in V(G_2)$,使得$(u,v)\notin E(G)$
- 证明: (反证)否则$\lambda(G)=|E'|$ $=|V(G_1)|\times|V(G_2)|\geq|V(G_1)|+|V(G_2)|-1=n-1$,与G非完全图相矛盾! #
- 说明: $a\geq1\wedge b\geq1\Rightarrow(a-1)(b-1)=ab-a-b+1\geq0 \Leftrightarrow ab\geq a+b-1$.

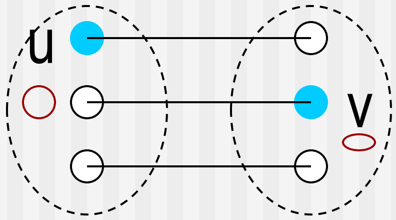


Whitney定理(续)

- 证明$(\kappa\le\lambda)$：设G-E'的2个连通分支是G_1,G_2. 设$u\in V(G_1),v\in V(G_2)$,使得$(u,v)\notin E(G)$. 如下构造V'':$\forall e\in E'$, 选择e的异于u,v的一个端点放入V''. $|V''|\le|E'|$.

  $G-V''\subseteq G-E'=G_1\cup G_2$, u和v在G-V''中不连通, 所以V''中含有点割集V'.

  所以 $\kappa\le|V'|\le|V''|\le|E'|=\lambda$.   #



推论

- 推论: k-连通图一定是k-边连通图.

$$k \le \kappa \le \lambda \le \delta$$

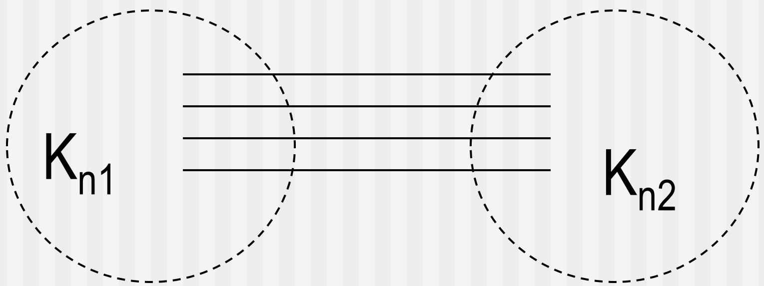
#

Hassler Whitney(1907~1989)

- 美国数学家,曾获得Wolf奖
- Erdos数：2
- 主要研究拓扑学.20世纪30年代发表了十几篇图论论文,定义了“对偶图”概念,推动了四色定理的研究.
- 一生的最后20年致力于数学教育,提倡应当让年轻人用自己的直觉(intuition)来解决问题,而不是教一些与他们的经验无关的技巧和结果.

定理7.11

- 定理7.11: G是n阶简单无向连通图, $\lambda(G)<\delta(G)$,则存在G^*以G为生成子图,G^*由完全图K_{n1}和K_{n2},以及它们之间的$\lambda(G)$条边组成, $\lambda(G)+2 \le n_1 \le \lfloor n/2 \rfloor$.

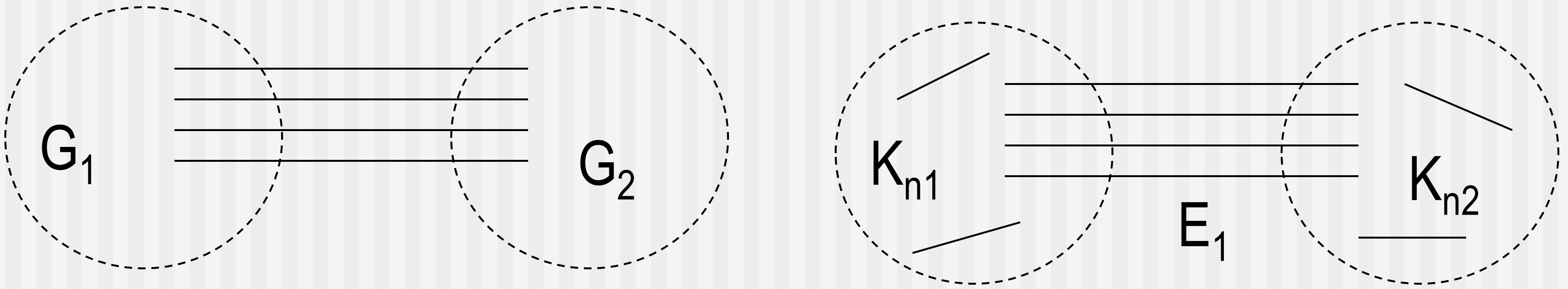


定理7.11(证明)

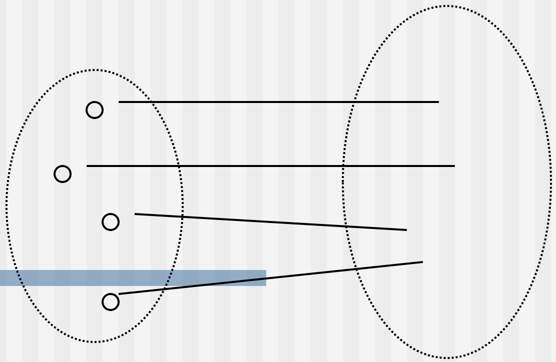
- 证明: 设E_1是G的边割集,$|E_1|=\lambda(G)$.

  设$G-E_1$的2个连通分支是G_1与G_2, $|V(G_1)|=n_1$, $|V(G_2)|=n_2$, 不妨设$n_1 \le n_2$, 显然$n_1+n_2=n$, $n_1 \le \lfloor n/2 \rfloor$.

  给G_1加新边使它成为K_{n1},给G_2加新边使它成为K_{n2}, 令$G^*=K_{n1} \cup E_1 \cup K_{n2}$.



定理7.11(证明)



- 证明(续):

$\lambda(G)<\delta(G)\le\delta(G^*)\le n_1-1+\lfloor\lambda(G)/n_1\rfloor$

$\Rightarrow \lambda(G)<n_1-1+\lambda(G)/n_1$

$\Rightarrow (n_1-1)(n_1-\lambda(G))>0$

$\Rightarrow \lambda(G)<n_1 \Rightarrow \lambda(G) \le n_1-1.$

若$\lambda(G)=n_1-1 \Rightarrow n_1-1+\lfloor\lambda(G)/n_1\rfloor = \lambda(G)$

$\Rightarrow \lambda(G)<\delta(G)\le\delta(G^*)\le\lambda(G)$ (矛盾!)

$\lambda(G)<n_1-1\Rightarrow \lambda(G) \le n_1-2 \Rightarrow \lambda(G)+2\le n_1.$ #

推论

已知：$\lambda(G)<\delta(G)$

- 推论: (1) $\delta(G)\le\delta(G^*)\le n_1-1\le\lfloor n/2\rfloor-1$

  (2) G^*中有不相邻顶点u,v,使得

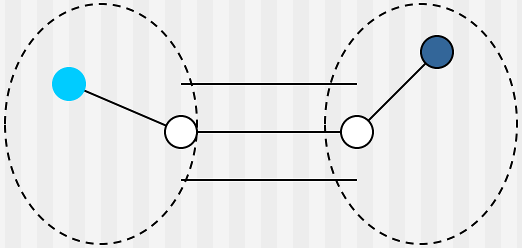
$$d_{G^*}(u)+d_{G^*}(v)\le n-2$$

  (3) $d(G)\ge d(G^*)\ge 3$

- 证明: (2)在G^*中不相邻的两点令$u\in G_1, v\in G_2$,则

  $d_{G^*}(u) \le n_1-1$, $d_{G^*}(v) \le n_2-1$.

  (3) $d(G)=\max d(u,v)$ #



定理7.12($\lambda=\delta$的充分条件)

- 定理7.12: G是6阶以上连通简单无向图.

(1) $\delta(G)\geq\lfloor n/2\rfloor \Rightarrow \lambda(G)=\delta(G)$

(2) 若任意一对不相邻顶点u,v都有

$d(u)+d(v)\geq n-1$,则$\lambda(G)=\delta(G)$.

(3) $d(G)\leq 2 \Rightarrow \lambda(G)=\delta(G)$.

定理7.12(1) 证明

- 定理7.12: G是6阶以上连通简单无向图.

(1) $\delta(G)\geq\lfloor n/2\rfloor \Rightarrow \lambda(G)=\delta(G)$

证明：由定理7.10知, $\lambda(G) \leq \delta(G)$,

若$\lambda(G)<\delta(G)$,又由定理7.11的推论知:

$$\delta(G) \leq \lfloor n/2\rfloor - 1$$

这与$\delta(G)\geq\lfloor n/2\rfloor$矛盾，所以$\lambda(G)=\delta(G)$. #

定理7.12(2) 证明

- 定理7.12: G是6阶以上连通简单无向图.

(2) 若任意一对不相邻顶点u,v都有

$$d(u)+d(v)\geq n-1, 则\lambda(G)=\delta(G).$$

证明：若 $\lambda(G)<\delta(G)$,由定理7.11中构造的G^*中存在不相邻的顶点u,v，使

$$d_{G^*}(u)+d_{G^*}(v) \leq n-2$$

由于$d_G(u) \leq d_{G^*}(u)$, $d_G(v) \leq d_{G^*}(v)$,得

$$d_G(u)+d_G(v) \leq n-2$$

与已知条件矛盾，所以$\lambda(G)=\delta(G)$.

定理7.12(3) 证明

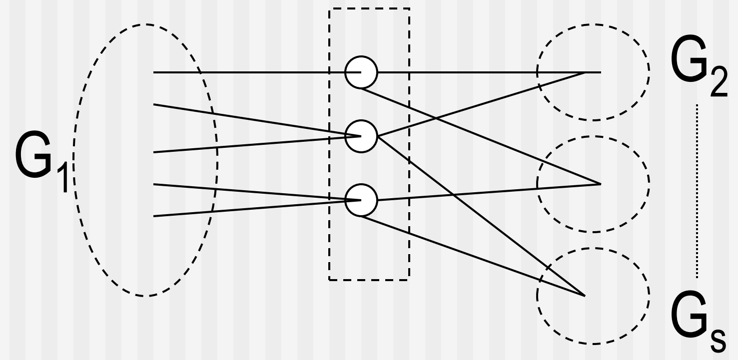
- 定理7.12: G是6阶以上连通简单无向图.

(3) $d(G)\le 2 \Rightarrow \lambda(G)=\delta(G)$.

证明：由7.11结论知,若 $\lambda(G)<\delta(G)$, $d(G)\ge 3$, 与已知矛盾！所以$\lambda(G)=\delta(G)$ #

定理7.13

- 定理7.13: G是n阶无向简单连通图,且不是完全图,则 $\kappa(G) \geq 2\delta(G)-n+2$.
- 证明: 设V_1是G的点割集, $|V_1|=\kappa(G)$, 设$G-V_1$的连通分支是$G_1,G_2,\ldots,G_s(s\geq2)$, 设$|V(G_1)|=n_1$, $|V(G_2)|+\ldots+|V(G_s)|=n_2$, 则$n_1+ n_2+\kappa(G)=n$.

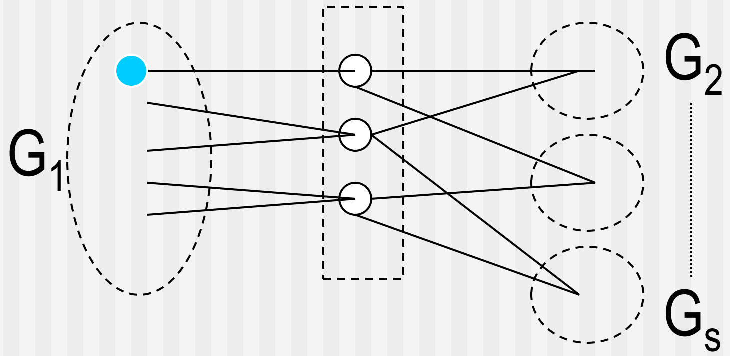


定理7.13(续)

- 证明(续): $\delta(G) \le n_1 - 1 + \kappa(G) = n_1 + \kappa(G) - 1$, 同理 $\delta(G) \le n_2 + \kappa(G) - 1$,

  所以 $2\delta(G) \le n_1 + \kappa(G) + n_2 + \kappa(G) - 2 = n + \kappa(G) - 2$,

  即 $\kappa(G) \ge 2\delta(G) - n + 2$. #



简单连通图的κ,λ,δ

- 定理7.14: n阶简单连通图的κ,λ,δ之间关系有且仅有3种可能:

  (1) $\kappa = \lambda = \delta = n-1$

  (2) $1 \le 2\delta-n+2 \le \kappa \le \lambda = \delta \le n-2$

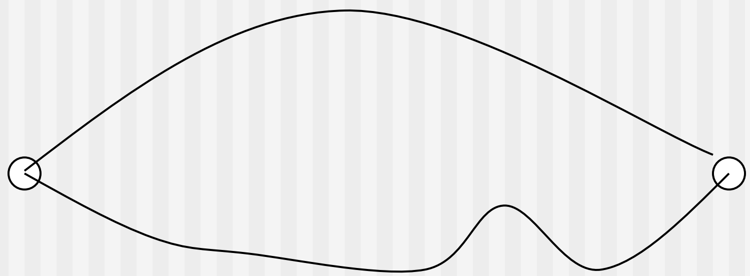
  (3) $0 \le \kappa \le \lambda \le \delta < \lfloor n/2 \rfloor$

- 证明: (有):构造出满足上述关系的图

(仅有):任意简单连通图G可以归入以上3类

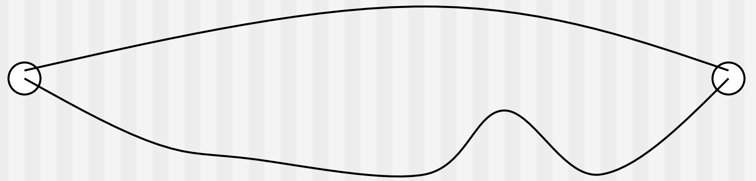
独立路径

- 独立(independent)路径：两条除起点和终点外无其他公共顶点的路径



2-连通的充分必要条件

- 定理7.15 (Whitney): 3阶以上无向简单连通图G是2-连通图 ⇔ G中任意两个顶点共圈
- 定理7.15': 3阶以上无向简单连通图G是2-连通图 ⇔ G中任意两个顶点之间有两条以上独立路径



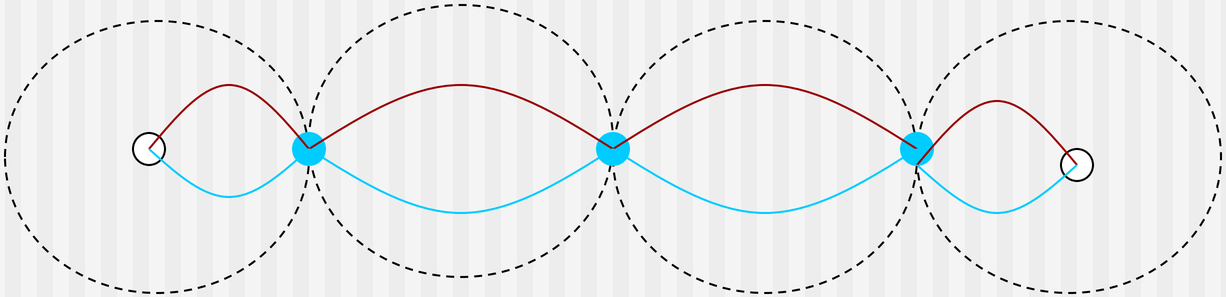
定理7.15(证明)

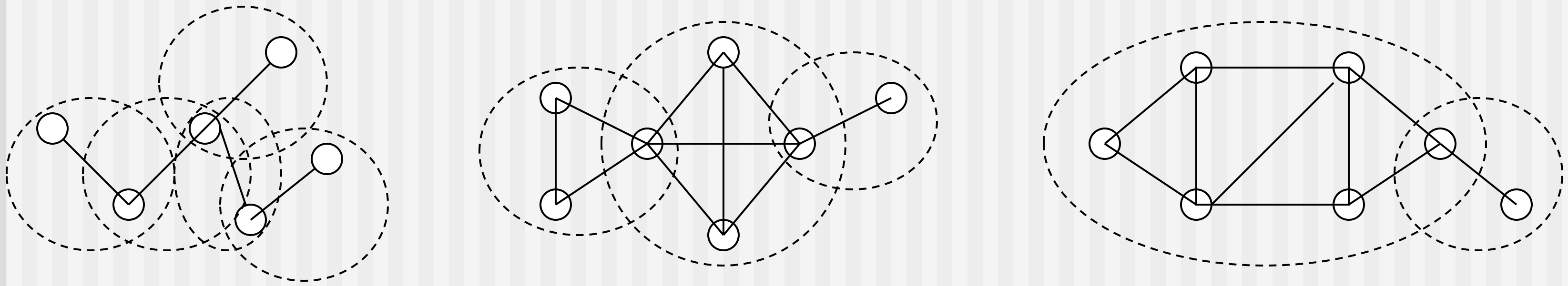
- 证明: (⇐) 因为G中任意两个顶点共圈,所以G中任意顶点均在若干个圈上,因此删除任何一个顶点不破坏连通性, G中无割点,所以$\kappa \geq 2$.

  (⇒) 设u,v为G中任意两个顶点,为证明u,v共圈,对u,v之间的距离d(u,v)做归纳

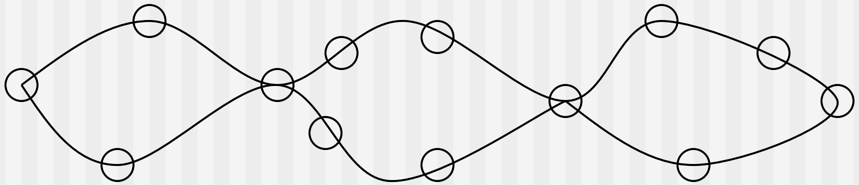
块

- 块(block)：极大无割点连通子图



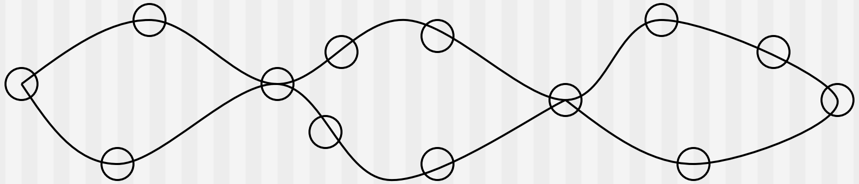


- 边不交(edge-disjoint)路径：两条无公共边(但可能有公共顶点)的路径



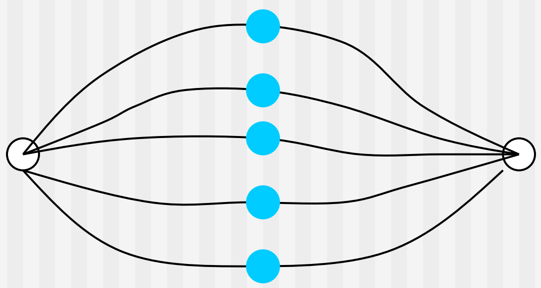
2-边连通的充分必要条件

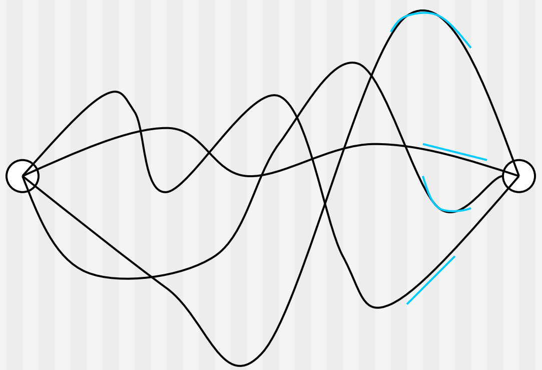
- 定理7.16: 3阶以上无向图G是2-边连通图 ⇔ G中任意两个顶点共简单回路
- 定理7.16': 3阶以上无向图G是2-边连通图 ⇔ G中任意两个顶点之间有两条以上边不交路径



k-(边)连通的充分必要条件

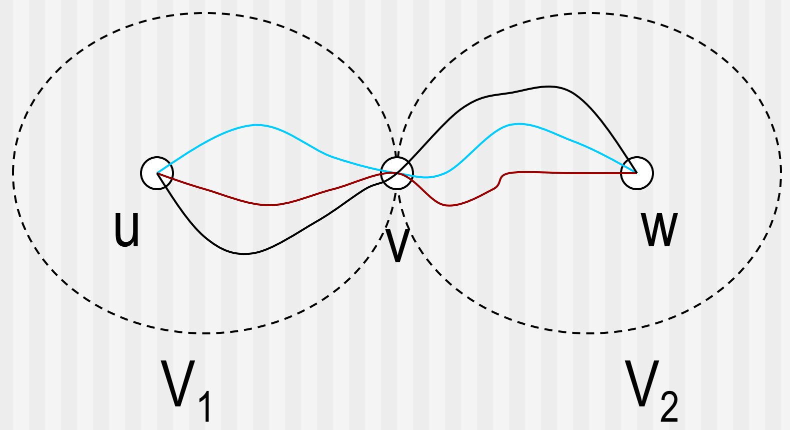
- 定理: 3阶以上无向图G是k-连通图 ⇔ G中任意两个顶点之间有k条以上独立路径
- 定理: 3阶以上无向图G是k-边连通图 ⇔ G中任意两个顶点之间有k条以上边不交路径





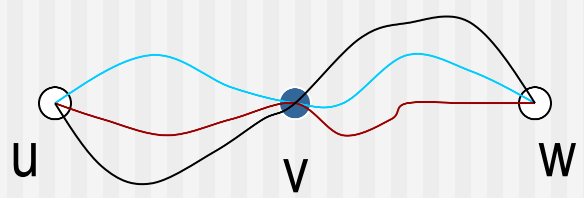
割点的充分必要条件

- 定理7.17: 无向连通图G中顶点v是割点 ⇔ 可以把V(G)-v划分成V_1与V_2,使得从V_1中任意顶点u到V_2中任意顶点w的路径都要经过v. #



割点的充分必要条件

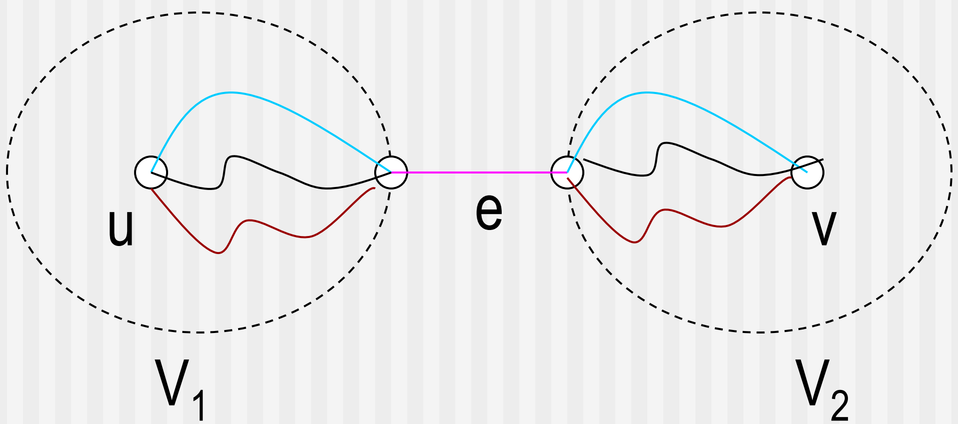
- 推论：无向连通图G中顶点v是割点 $\Leftrightarrow$ 存在与v不同的顶点u和w,使得从顶点u到w的路径都要经过v. #



桥的充分必要条件

- 定理7.18:无向连通图G中边e是桥

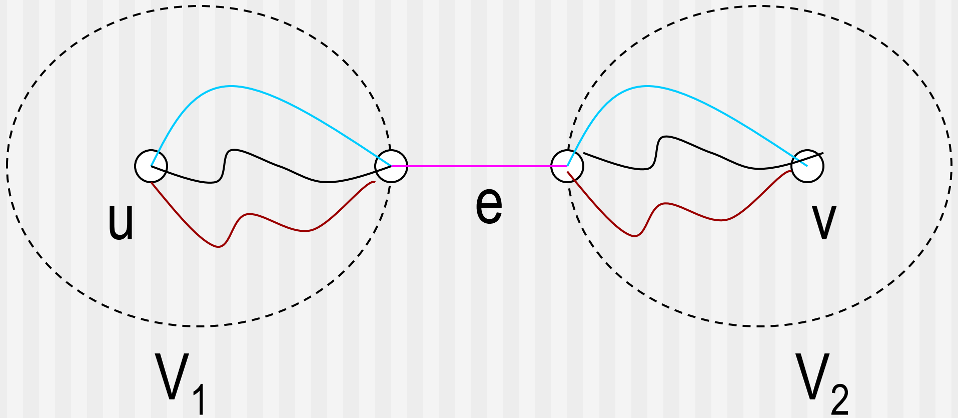
⇔ G的任何圈都不经过e.   #



桥的充分必要条件

- 定理7.19: 无向连通图G中边e是桥

$\Leftrightarrow$ 可以把V(G)划分成V_1与V_2,使得从V_1中任意顶点u到V_2中任意顶点v的路径都要经过e. #



*块的充分必要条件

- 定理20: G是3阶以上无向简单连通图.则

(1) G是块 ⇔ (2) G中任意2顶点共圈

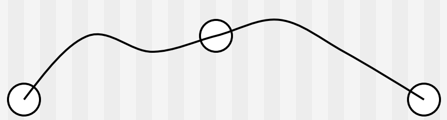
⇔ (3) G中任意1顶点与任意1边共圈

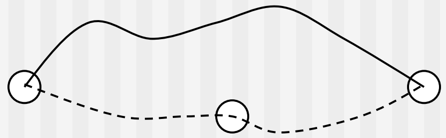
⇔ (4) G中任意2边共圈

⇔ (5) G中任意2顶点与任意1边,有路径连接这2顶点并经过这1边

⇔ (6) G中任意3顶点,有路径连接其中2顶点并经过第3点

⇔ (7) G中任意3顶点,有路径连接其中2顶点并不经过第3点. #

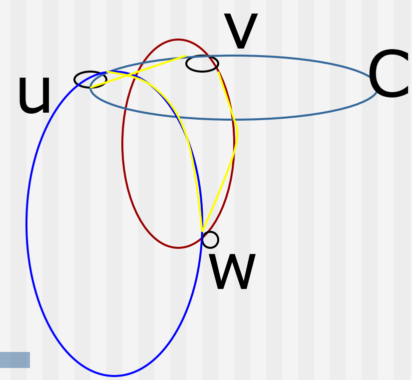




定理7.20证明

- (1)G是块 ⇒ (2) G中任意2顶点共圈

证明：即根据2-连通的充要条件



定理7.20 证明

- (2) G中任意2顶点共圈 ⇒ (3) G中任意1顶点与任意1边共圈 ⇒(4) G中任意2边共圈

(2) $\Longrightarrow$ (3)，令u是任一顶点，vw是任一边，由(2)，存在包含u，v的圈C。若$w\in C$，则C中含u的(v, w)-段+vw构成圈C'，即为所求；若$w\notin C$，由(2)知，v不是G的割点.故存在不过v点的(u, w)-路P，设x是由w出发、沿P前进、与C相交的第一个顶点，则C中含u的(v, x)-段+P中的(w, x)-段+vw构成圈C'，即为所求.

(3) $\Longrightarrow$ (4)，类似(2) $\Longrightarrow$ (3)的证明；

定理7.20 证明

(4) G中任意2边共圈⇒(5) G中任意2顶点与任意1边，有路径连接这2顶点并经过这1边⇒ (6) G中任意3顶点，有路径连接其中2顶点并经过第3点

(4) $\Longrightarrow$ (5)，易见(4) $\Longrightarrow$ (3)，令u，v是任意两个顶点，e是任意一条边．由(3)存在C_1、C_2分别包含u、e及v、e．若$u\in C_2$或$v\in C_1$，则(5)已成立．否则从u出发，沿C_1前进，到达C_1与C_2的第一个交点，然后沿C_2含e的部分到达v，即为所求之路；

(5) $\Longrightarrow$ (6)，设u，v是任意两个顶点，w是任意第三个顶点，e是w的关联边．由(5)存在过e的(u,v)-路，显然此路必过w；

定理7.20 证明

(6) G中任意3顶点,有路径连接其中2顶点并经过第3点 ⇒(7) G中任意3顶点,有路径连接其中2顶点并不经过第3点 ⇒ (1)G是块

(6) ⟹ (7)，设u,v,w是任意三个顶点，由(6)存在过v的(u,w)-路P，则P中(u,v)-段，即为过u，v而不过w的路；

(7) ⟹ (1)，对G中任意两顶点u，v及任意第三顶点w，由(7)知，在$G-w$中存在(u,v)-路，即$G-w$连通，从而G是2-连通的。

比较

- 块：极大无割点连通子图
- 2-连通图：$\kappa \geq 2$，或连通无割点
- 2-边连通图：$\lambda \geq 2$，或连通无桥
- K_2是块，但不是2-(边)连通图 
- 2-连通图 $\subset$ 2-边连通图

总结

- 点(边)割集，割点(边)
- 点连通度,边连通度,Whitney定理
- 连通简单图κ,λ,δ之间的关系
- 2-连通, 2-边连通的充要条件
- 割点, 桥, 块的充要条件

作业

- P131: 18，22, 25