通路与回路

第二编 图论　第七章 图

7.2 通路与回路

北京大学

内容提要

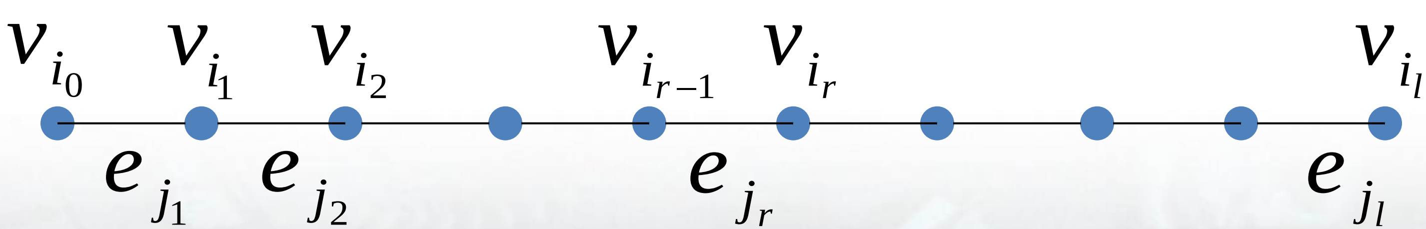
- 通路、简单通路、初级通路
- 回路、简单回路、初级回路
- 扩大路径法

通路(walk)

- 顶点与边的交替序列

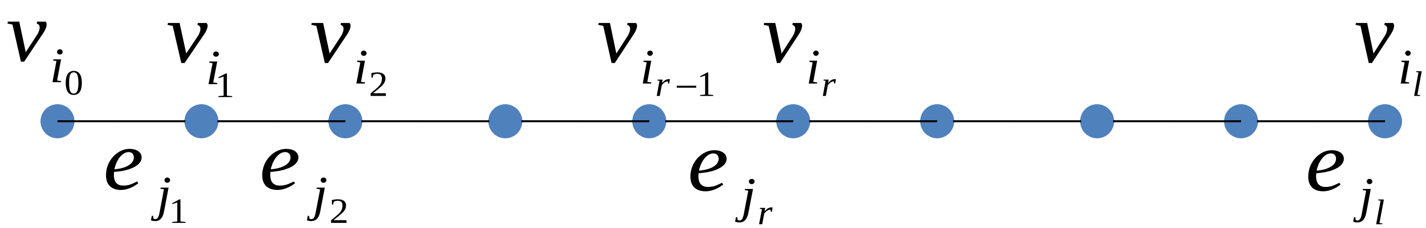
其中 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_{l-1}} e_{j_l} v_{i_l}$

$$e_{j_r} = (v_{i_{r-1}}, v_{i_r}), r = 1, 2, \ldots, l$$



起点, 终点, 通路长度

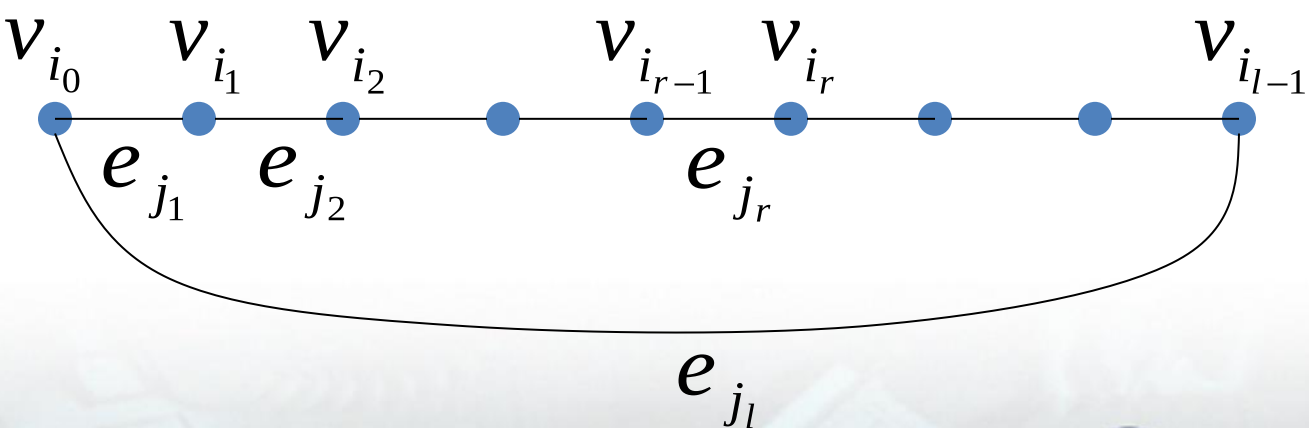
- v_{i_0} 是起点, v_{i_l} 是终点
- 通路长度 $|\Gamma| = l$



回路(closed walk)

- 若 $v_{i_0} = v_{i_l}$

$$\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_{l-1}} e_{j_l} v_{i_0}$$



简单(复杂、初级)通(回)路

- 简单通路：没有重复边的通路
- 简单回路：没有重复边的回路
- 复杂通路：有重复边的通路
- 复杂回路：有重复边的回路
- 初级通路(路径): 没有重复顶点的通路
- 初级回路(圈): 没有重复顶点的回路

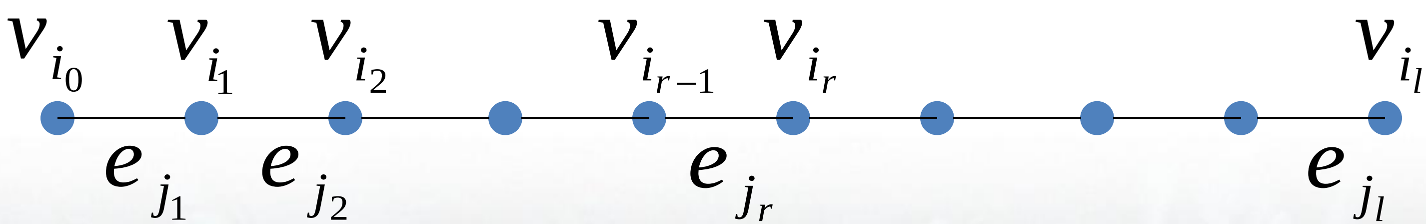
通(回)路的表示

- 可以只用边的序列来表示通(回)路

$$e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l}$$

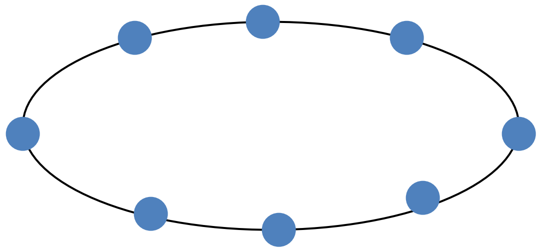
- 简单图可以只用顶点的序列来表示通(回)路

$$v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_{l-1}} v_{i_l}$$



圈的表示

- 画出的长度为*l* 的圈
  - 如果是非标定的, 则在同构意义下是唯一的
  - 如果是标定的(指定起点,终点), 则是*l* 个不同的圈



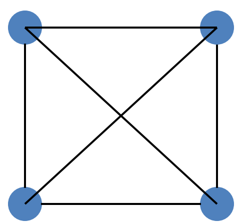
周长

- G是含圈的无向简单图

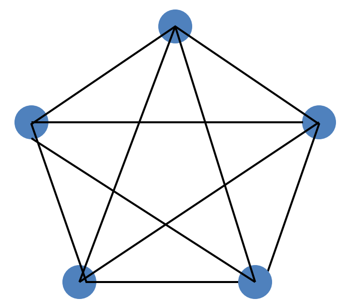
c(G)=最长圈的长度

周长举例

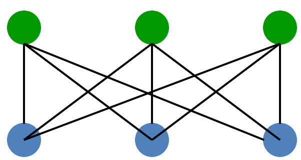
- $c(K_n)=n\ (n\geq 3)$　　$c(K_{n,n})=2n$



K_4



K_5



$K_{3,3}$

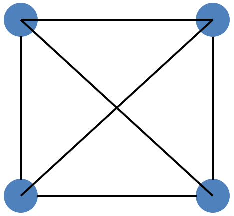
围长

- G是含圈的无向简单图

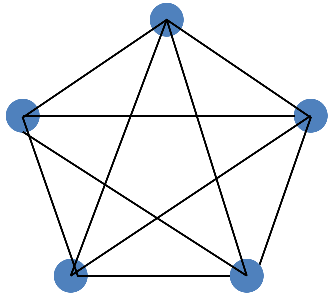
$g(G)$=最短圈的长度

围长举例

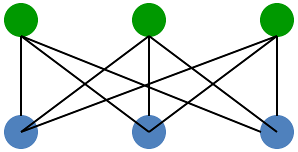
- $g(K_n)=3\ (n\geq 3),\ g(K_{n,n})=4\ (n\geq 2)$



K_4



K_5



$K_{3,3}$

定理7.6

- 定理7.6　在n阶(有向或无向)图G中,若从不同顶点v_i到v_j有通路, 则从v_i到v_j有长度小于等于n-1的通路

  证明: 下一页

- 推论　在n阶图G中,若从不同顶点v_i到v_j有通路,则从v_i到v_j有长度小于等于n-1的路径(初级通路).　#

定理7.6证明

- 证: 设 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l} v_{i_l}, v_{i_0} = v_i, v_{i_l} = v_j$,

若l>n-1, 则Γ上顶点数l+1>n, 必存在0≤s<k≤l, 使得$v_{i_s} = v_{i_k}$,于是Γ上有从 v_{i_s} 到自身的回路C_{sk}, 在Γ上删除C_{sk}的所有边和除 v_{i_s} 外的所有顶点,得

$$\Gamma' = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_s} e_{j_{k+1}} v_{i_{k+1}} \cdots e_{j_l} v_{i_l}$$

则 |Γ’ |<|Γ|,重复进行有限多步为止. #

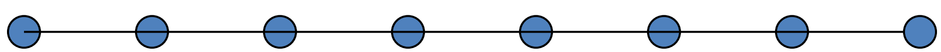
定理7.6推论

- 在n阶图G中,若从不同顶点v_i到v_j有通路,则从v_i到v_j有长度小于等于n-1的路径(初级通路). #

定理7.7

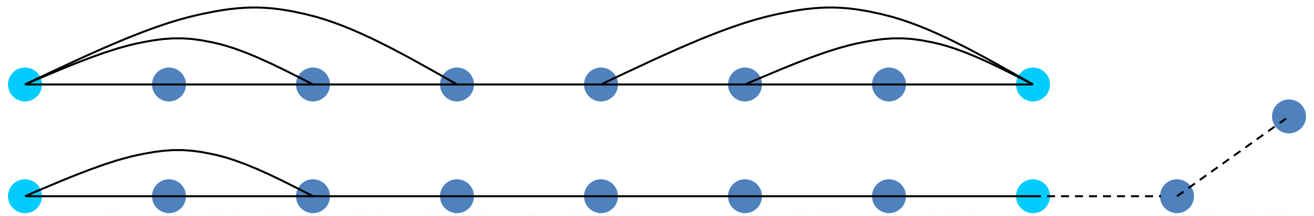
- 定理7.7　在n阶图G中,若有从顶点v_i到自身的回路, 则有从v_i到自身长度小于等于n的回路.　#

- 推论　在n阶图G中,若有从顶点v_i到自身的简单回路, 则有从v_i到自身长度小于等于n的圈(初级回路).



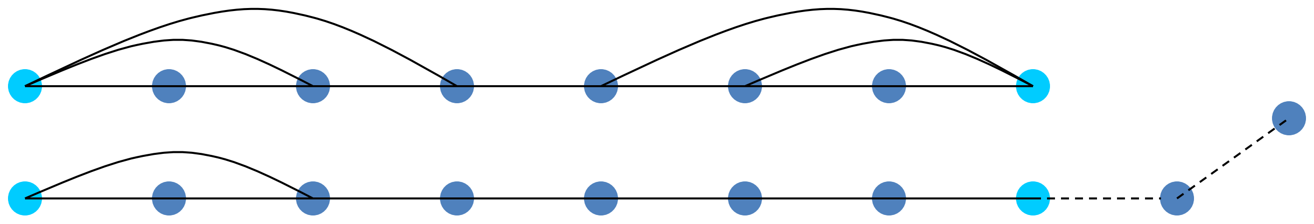
极大路径

- 在无向简单图中, 路径的两个端点不与路径本身以外的顶点相邻, 这样的路径称为极大路径
- 在有向图中, 路径起点的前驱,终点的后继,都在路径本身上



扩大路径法

- 任何一条路径,只要不是极大路径,则至少有一个端点与路径本身以外的顶点相邻, 则路径还可以扩大,直到变成极大路径为止



例7.6

例7.6: 设G是n(n≥3)阶无向简单图, δ(G)≥2 .

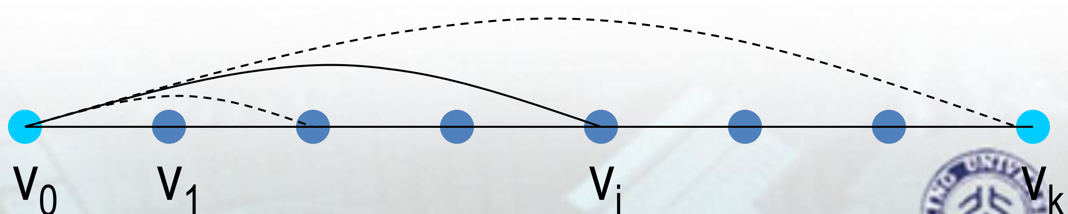
证明 G中有长度≥δ(G)+1的圈

证明: $\forall u_0 \in V(G)$, $\delta(G)\geq 2 \Rightarrow \exists u_1 \in N_G(u_0)$,

对$\Gamma_0=u_0u_1$采取扩大路径法,得到极大路径$\Gamma=v_0v_1\ldots v_k$. $d(v_k)\geq\delta(G)\Rightarrow k\geq\delta(G)$,

$d(v_0)\geq\delta(G) \Rightarrow \exists v_i \in N_G(v_0)$, $\delta(G)\leq i\leq k$.

于是 $v_0v_1\ldots v_i\,v_0$是长度≥δ(G)+1的圈. #



例7.7(有向图的例子)

- D是有向简单图，
  $\delta(D)\geq 2$, $\delta^-(D)>0$, $\delta^+(D)>0$,
  证明D中有长度大于等于
  $\max\{\delta^-(D),\delta^+(D)\}+1$的圈

例7.7证明

- 证明: 分别考虑v_0,v_k:

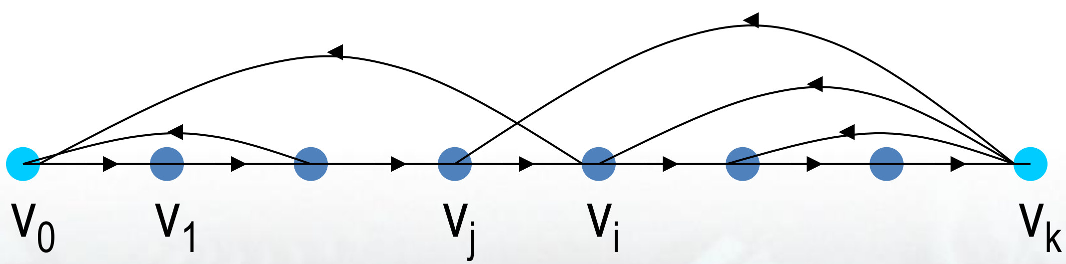
(1) $d^-(v_0)\geq\delta^-(D) \Rightarrow \exists v_i\in N_D^-(v_0),\ \delta^-\leq i\leq k$.

于是 $v_0v_1\ldots v_i\, v_0$是长度$\geq\delta^-+1$的圈.

(2) $d^+(v_k)\geq\delta^+(D) \Rightarrow \exists v_j\in N_D^+(v_1),\ 0\leq j\leq k-\delta^+$.

于是 $v_jv_{j+1}\ldots v_k\, v_j$是长度$\geq\delta^++1$的圈.

较长的就是D中长度$\geq\max\{\delta^-,\delta^+\}+1$的圈. #



小结

- 通路、简单通路、初级通路
- 回路、简单回路、初级回路
- 扩大路径法