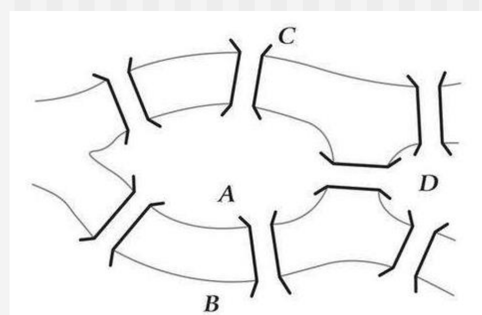
第二编 图论

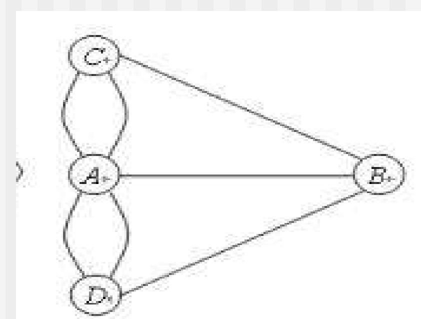
图论（Graph Theory）是数学的一个分支。它以图为研究对象。图论中的图是由若干给定的点及连接两点的线所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系，用点代表事物，用连接两点的线表示相应两个事物间具有这种关系。

图论本身是应用数学的一部份，因此，历史上图论曾经被好多位数学家各自独立地建立过。关于图论的文字记载最早出现在欧拉1736年的论著中，他所考虑的原始问题有很强的实际背景。

图论简介

图论起源于著名的哥尼斯堡七桥问题。A、B、C，D表示陆地。问题是要从这四块陆地中任何一块开始，通过每一座桥正好一次，再回到起点。然而无数次的尝试都没有成功。欧拉在1736年解决了这个问题，他用抽象分析法将这个问题化为第一个图论问题：即把每一块陆地用一个点来代替，每一座桥用相应两点的一条线来代替，从而相当于得到一个「图」。欧拉证明了这个问题没有解，并且推广了这个问题，给出了对于一个给定的图可以某种方式走遍的判定法则。这项工作使欧拉成为图论﹝及拓扑学﹞的创始人。





第7章 图

- 7.1 图的基本概念
- 7.2 通路与回路
- 7.3 无向图的连通性
- 7.4 无向图的连通度
- 7.5 有向图的连通性

无序积

- 无序积: A,B为两个集合，称
  { (a,b) |a∈A∧b∈B}为A与B的无序积，记作A&B
  允许 a = b
  无序对: (a,b)=(b,a)

无向图(undirected graph)

- 无向图(graph): 是一个有序的二元组<V,E>,记作G

  (1) V≠∅, 顶点集,其元素为顶点或结点(vertex / node)

  (2) E称为边集,是无序积V&V的多重子集，其元素称为无向边，简称边(edge / link).

有向图(directed graph)

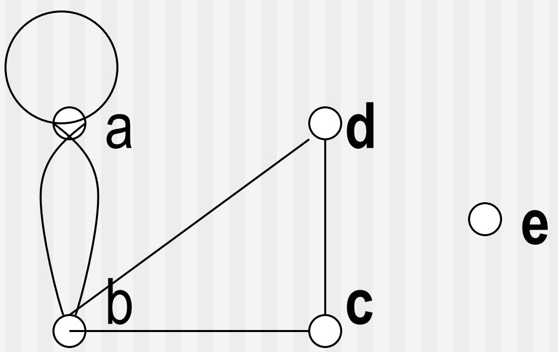
- 有向图(digraph): 是一个有序二元组<V,E>, 记作D

  (1)顶点集V≠∅, 结点/顶点(vertex / node)

  (2)边集, E是卡氏积V×V的多重子集, 边(edge / link / arc)

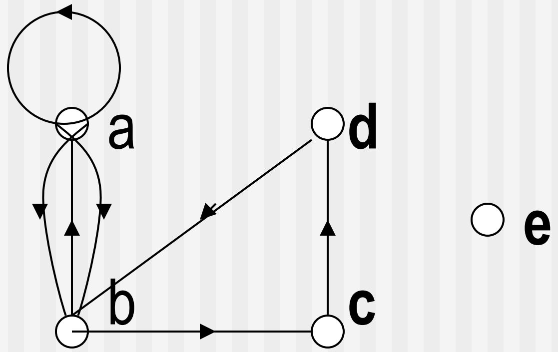
例：无向图

- 例： G=<V,E>,V={a,b,c,d,e},
  E={(a,a),(a,b),(a,b),(b,c),(c,d),(b,d)}.



例：有向图

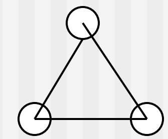
例： D=<V,E>,V={a,b,c,d,e}, E={ <a,a>, <a,b>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b> }.



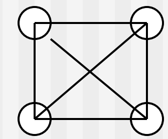
表示方法

- 图G：V(G), E(G)分别表示图G的顶点集和边集
- 图D：V(D)，E(D)
- |V(G)|, |E(G)|, |V(D)|, |E(D)|分别表示G和D的顶点数和边数

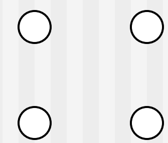
- n阶图(有向图): 若|V(G)|=n 或|V(D)|=n



- 有限图：若|V(G)|和|E(G)|均为有限数



- 零图(null graph): E=∅,
- n阶零图: |V(G)|=n, N_n

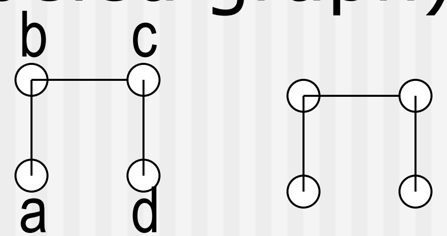


- 平凡图(trival graph): 1阶零图, N_1
- 空图(empty graph): V=E=∅, ∅

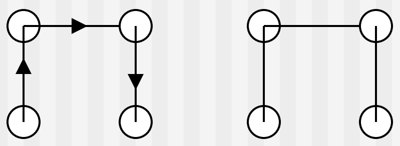
  - 图定义中规定顶点集非空，由于图的运算中，可能产生点集为空集的运算结果

标定图,非标定图,基图

- 标定图(labeled graph): 顶点或边标定字母
- 非标定图(unlabeled graph): 顶点或边不标定字母

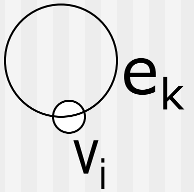


- 基图(底图ground graph): 有向图各边的箭头都去掉，所得图为无向图



关联(incident)

- 关联(incident):图G中, 边$e_k=(v_iv_j)$, e_k与v_i(e_k与v_j)彼此关联 （点与边）
- 关联次数: 若$v_i \neq v_j$,称e_k与v_i(e_k与v_j)关联次数为1; 若$v_i=v_j$,关联次数为2

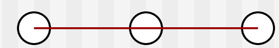


- 环(loop):只与一个顶点关联的边
- 孤立点(isolated vertex):无边关联的点

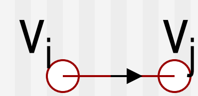
相邻(adjacent)

- 相邻(邻接) :G, 任意两顶点$v_i v_j$,存在边e_k, $e_k=(v_i,v_j)$,称v_i,v_j彼此相邻 (点与点)

- 任意两边e_k,e_l,至少存在一个公共端点,称e_k,e_l彼此相邻（边与边）

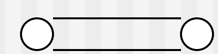


- 邻接到,邻接于: 有向图D, $e_k=<v_i,v_j>$, v_i邻接到v_j, v_j邻接于v_i

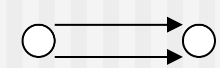


- 平行边(parallel edge):

端点相同的两条无向边是平行边

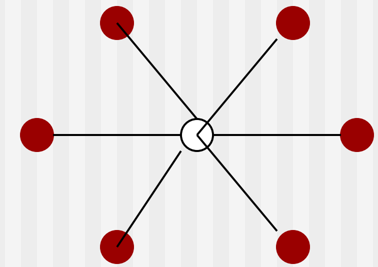


起点与终点相同的两条有向边是平行边

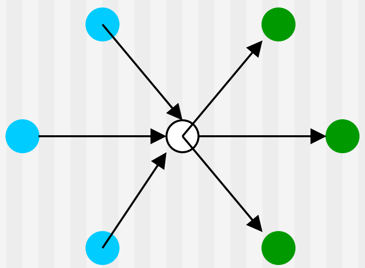


邻域(neighborhood)

- 邻域: $N_G(v)=\{u|u\in V(G)\wedge(u,v)\in E(G)\wedge u\neq v\}$ 为v的邻域（v在图G中的相邻顶点）

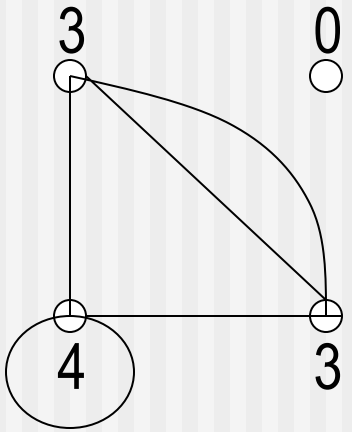


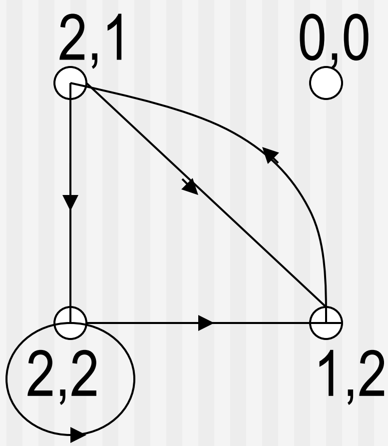
- 闭(closed)邻域: $N_G(v)\cup\{v\}$
- 关联集: $I_G(v)=\{e \mid e$与v关联$\}$
- 后继:$\Gamma_D^+(v)=\{u|u\in V(D)\wedge<v,u>\in E(D)\wedge u\neq v\}$
- 前驱:$\Gamma_D^-(v)=\{u|u\in V(D)\wedge<u,v>\in E(D)\wedge u\neq v\}$
- 邻域: $N_D(v)=\Gamma_D^+(v)\cup\Gamma_D^-(v)$
- 闭邻域: $N_D(v)\cup\{v\}$



顶点的度数(degree/valence)

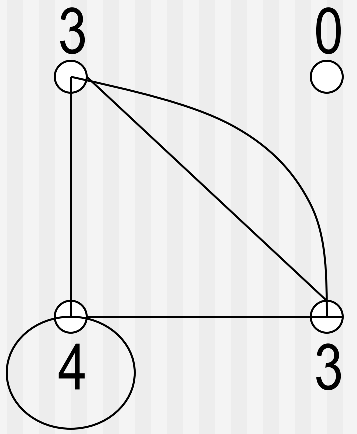
- 度$d_G(v)$: v作为G中边的端点的次数之和
- 出度$d_D^+(v)$: v作为D中边的始点的次数之和
- 入度$d_D^-(v)$: v作为D中边的终点的次数之和
- 度$d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$

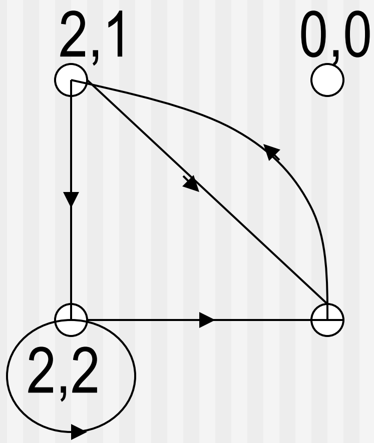




最大(出/入)度,最小(出/入)度

- 最大度: $\Delta(G) = \max\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最小度: $\delta(G) = \min\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最大出度: $\Delta^+(D) = \max\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小出度: $\delta^+(D) = \min\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最大入度: $\Delta^-(D) = \max\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小入度: $\delta^-(D) = \min\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$
- 简记为 Δ, δ, Δ^+, δ^+, Δ^-, δ^-





$\delta=0$

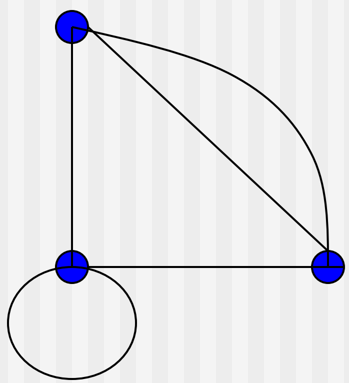
$\Delta=4$

$\Delta^+ = 2,\ \delta^+=0$

$\Delta^- = 2,\ \delta^- = 0$

握手定理(图论基本定理)

- 定理1：设G=<V,E>是无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$|E|=m$，则 $d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_n)=2m$. #



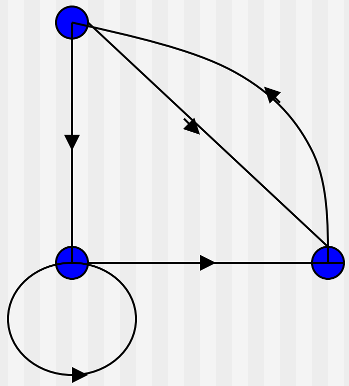
每一条边均有两个端点，

提供2度，

m条边提供2m度

- 定理2:设D=<V,E>是有向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$d^+(v_1)+d^+(v_2)+\ldots+d^+(v_n)$$
$$= d^-(v_1)+d^-(v_2)+\ldots+d^-(v_n) = m. \quad \#$$



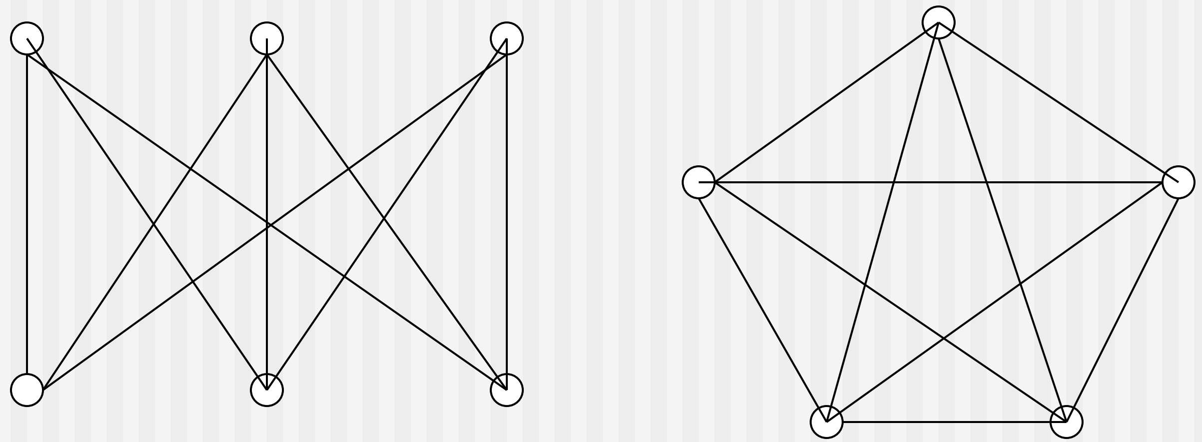
d^+, d^-

- 推论:任何图中,奇数度顶点的个数是偶数. #

证明：分为奇数度顶点集合V_1和偶数度顶点集合V_2

简单图(simple graph)

- 简单图(simple graph): 无环,无平行边
- 若G是简单图, 则 $0 \le \Delta(G) \le n-1$



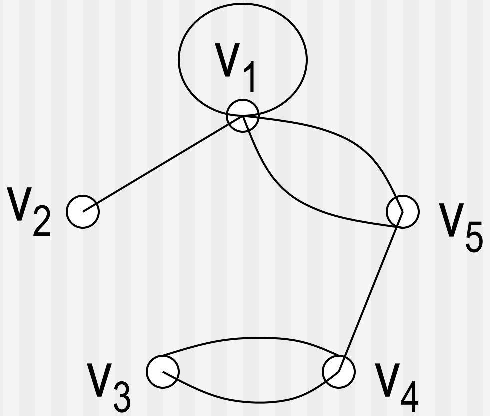
度数列

- 度数列: 设G=<V,E>,V={v_1,v_2,…,v_n}, 称

$$\mathbf{d} = (d(v_1),d(v_2),\ldots, d(v_n))$$

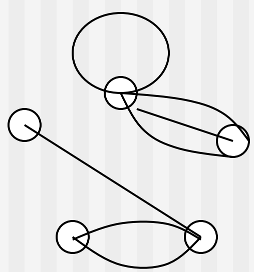
为G的度数列

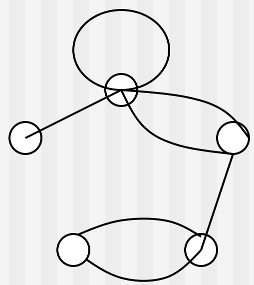
- 例: $\mathbf{d}$ = (5, 1, 2, 3, 3)



可图化

- 可图化:设非负整数列**d**=(d_1,d_2, …, d_n), 若存在图G, 使得G的度数列是**d**, 则称**d**为可图化的
- 例: **d** = (5, 3, 3, 2, 1)





定理3(可图化充要条件)

- 定理3:非负整数列$\mathbf{d}=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$是可图化的，当且仅当 $d_1+d_2+\ldots+d_n=0 \pmod 2$.
- 证明: ($\Rightarrow$) 握手定理

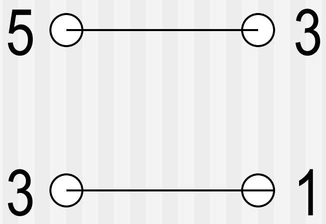
  ($\Leftarrow$) 奇数度点两两之间连一边，剩余度用环来实现. #

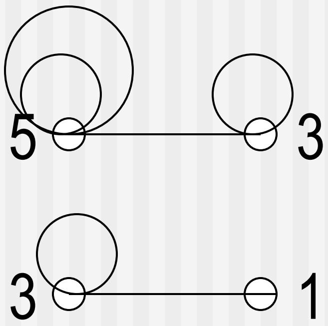
例2

例2:

(1)**d**=(5,4,4,3,3,2);   ×

(2)**d**=(5,3,3,2,1).





可简单图化

- 可简单图化:设非负整数列**d**=(d_1, d_2, …, d_n), 若存在简单图G, 使得G的度数列是**d**, 则称**d**为可简单图化的

可简单图化充要条件

- 定理5(V. Havel, 1955):设非负整数列 $\mathbf{d}=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$满足:

$$d_1+d_2+\ldots+d_n=0 \pmod 2),$$

$$n-1\geq d_1\geq d_2\geq\ldots\geq d_n\geq 0,$$

则**d**可简单图化当且仅当

$$\mathbf{d}'=(d_2-1,d_3-1,\ldots,d_{d1+1}-1,d_{d1+2},\ldots,d_n)$$

可简单图化.

举例

- 例4: 判断下列非负整数列是否可简单图化.

(1) (5,5,4,4,2,2) (2)(4,4,3,3,2,2)

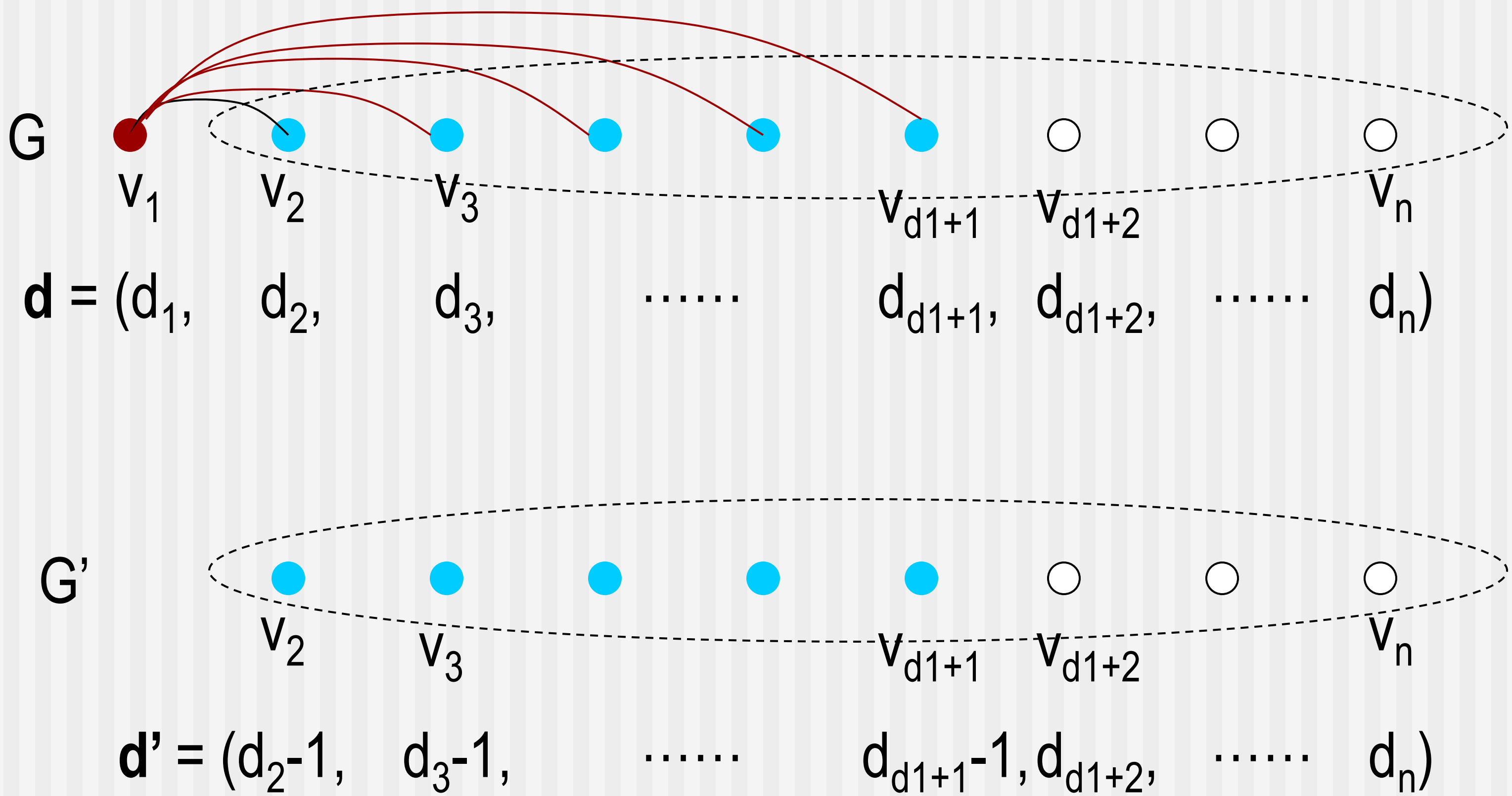
- 解: (1) (5,5,4,4,2,2), (4,3,3,1,1),

(2,2,0,0), (1,-1,0), 不可简单图化.

(2) (4,4,3,3,2,2), (3,2,2,1,2), (3,2,2,2,1),

(1,1,1,1), (0,1,1),(1,1,0), (0,0), 可简单图化. #

定理5(图示)


G
v1 v2 v3 vd1+1 vd1+2 vn
d = (d1, d2, d3, …… dd1+1, dd1+2, …… dn)
G'
v2 v3 vd1+1 vd1+2 vn
d' = (d2-1, d3-1, …… dd1+1-1, dd1+2, …… dn)

定理5(证明)

- 证明: (⇐) 设
  $d' = (d_2-1, d_3-1, \ldots, d_{d1+1}-1, d_{d1+2}, \ldots, d_n)$
可简单图化为 $G'=\langle V',E'\rangle$, 其中

$$V'=\{v_2,v_3,\ldots,v_n\},$$

则令$G=\langle V,E\rangle$, $V=V'\cup\{v_1\}$,
$E = E' \cup \{ (v_1,v_2), (v_1,v_3), \ldots, (v_1,v_{d1+1}) \}$,
于是**d**可简单图化为G.

定理5(证明,续)

- 证明: (⇒) 设**d**可简单图化为$G=\langle V,E\rangle$, 其中 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $d(v_1)\geq d(v_2)\geq\ldots\geq d(v_n)$.

(1) 若$N_G(v_1)=\{v_2,v_3, \ldots,v_{d1+1}\}$, 则令

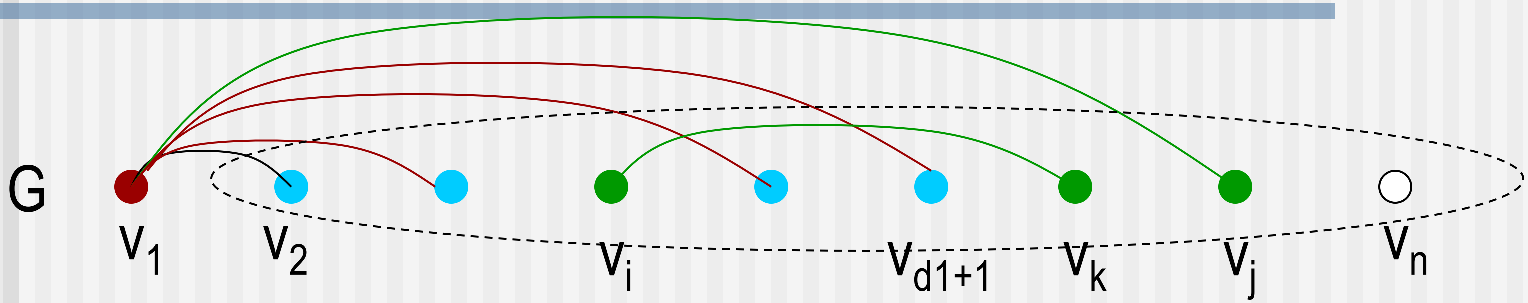
$G'=\langle V',E'\rangle$, $V'=V-\{v_1\}$,

$E'=E-\{ (v_1,v_2), (v_1,v_3), \ldots, (v_1,v_{d1+1}) \}$,

于是**d'**可简单图化为G'.

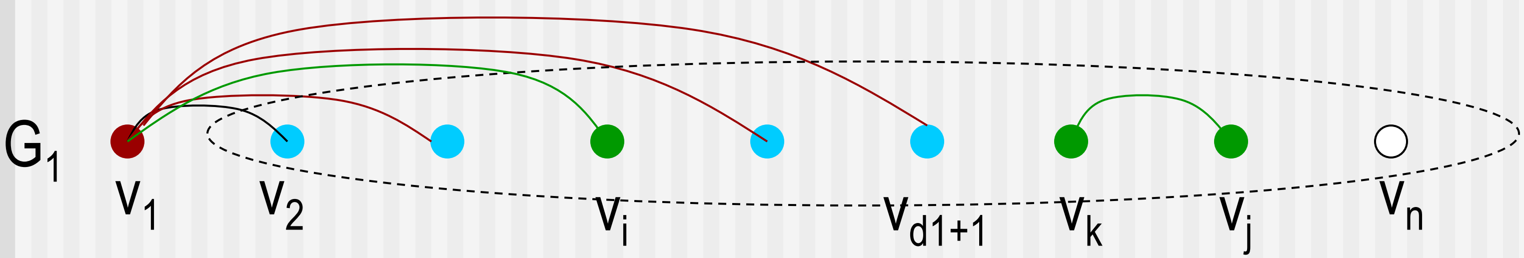
(2) 若$\exists i\exists j(i<j \wedge v_i\notin N_G(v_1) \wedge v_j\in N_G(v_1))$,

定理5(示意)



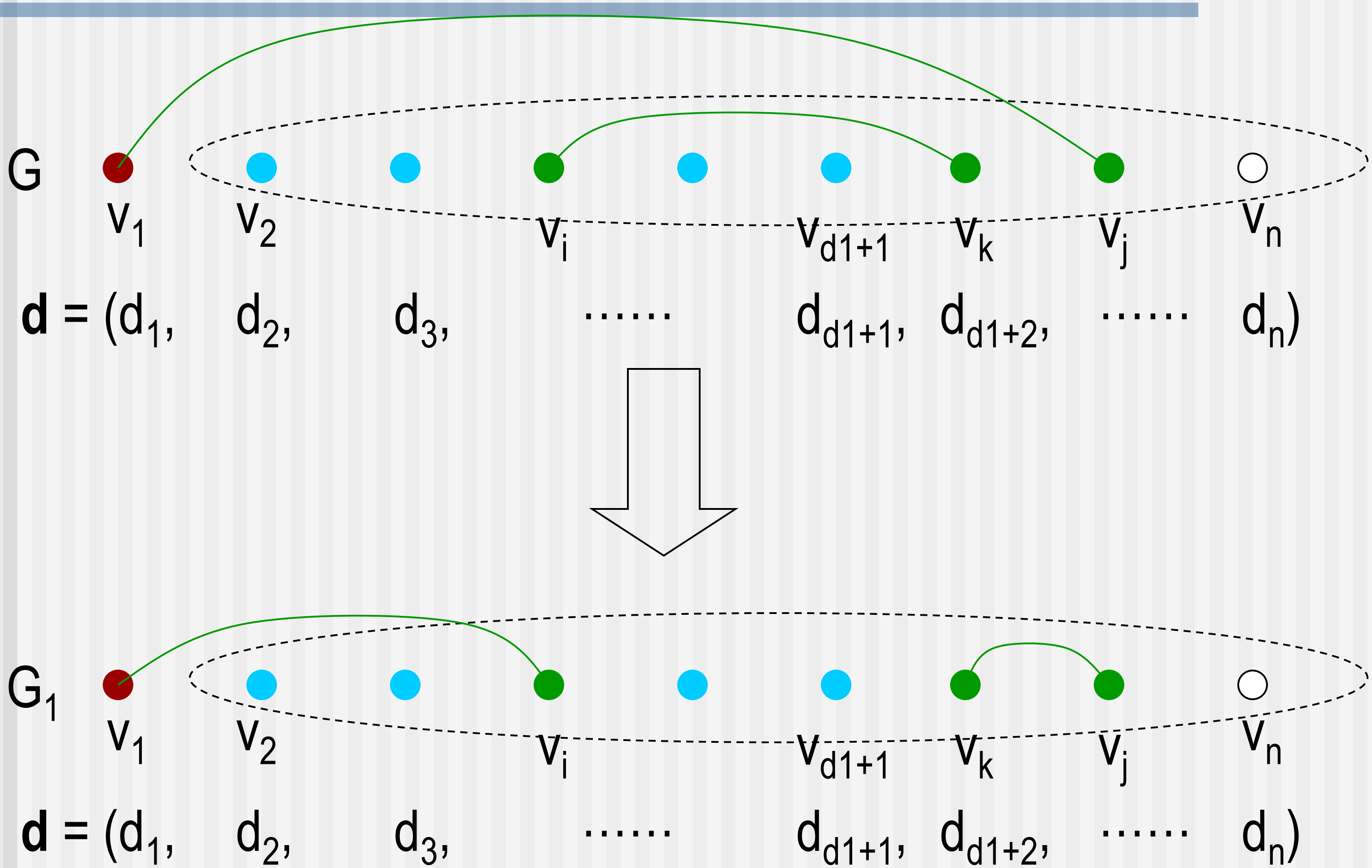
$\mathbf{d} = (d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad \cdots\cdots \quad d_{d1+1}, \quad d_{d1+2}, \quad \cdots\cdots \quad d_n)$

$$v_1 \notin N_G(v_i) \wedge v_1 \in N_G(v_j) \wedge d_i \geq d_j \Rightarrow \exists v_k (v_k \in N_G(v_i) \wedge v_k \notin N_G(v_j))$$



$\mathbf{d} = (d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad \cdots\cdots \quad d_{d1+1}, \quad d_{d1+2}, \quad \cdots\cdots \quad d_n)$

定理5(示意)


G
v_1
v_2
v_i
v_{d1+1}
v_k
v_j
v_n
d = (d_1, d_2, d_3, …… d_{d1+1}, d_{d1+2}, …… d_n)
G_1
v_1
v_2
v_i
v_{d1+1}
v_k
v_j
v_n
d = (d_1, d_2, d_3, …… d_{d1+1}, d_{d1+2}, …… d_n)

定理5(证明,续)

- 证明: ($\Rightarrow$)

(2)若$\exists i \exists j(1 \le i < j \le n \wedge v_i \notin N_G(v_1) \wedge v_j \in N_G(v_1))$,

则由$d_i \ge d_j$可得

$\exists k(1 \le k \le n \wedge v_k \notin N_G(v_j) \wedge v_k \in N_G(v_i))$,

令$G_1 = \langle V, E \cup \{(v_1,v_i),(v_k,v_j)\} - \{(v_1,v_j),(v_k,v_i)\} \rangle$,

则G_1与G的度数列都还是**d**,重复这个步骤,

直到化为(1)中情形为止. #

定理4 (可简单图化充要条件)

- 定理4(P.Erdös,T.Gallai,1960):设非负整数列 $\mathbf{d}=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$满足:

$$n-1\geq d_1\geq d_2\geq\ldots\geq d_n\geq 0,$$

则**d**可简单图化当且仅当

$$d_1+d_2+\ldots+d_n=0(\mathrm{mod}\ 2)$$

并且对r=1,2,…,n-1有

$$d_1+d_2+\ldots+d_r$$
$$\leq r(r-1)+\min\{r,d_{r+1}\}+\min\{r,d_{r+2}\}+\ldots+\min\{r,d_n\}.$$ #

Paul Erdös(1913-1996)

- 一生中同485位合作者发表过1475篇数学论文,每天工作19个小时以上。
- Another roof, Another proof
- "Erdos数"是数学界流传的一个典故。即给每一个数学家赋予一个Erdos数：Erdos本人的Erdos数是0； 曾与Erdos合作发表过文章的人的Erdos数是1；没有与Erdos合作发表过文章，但与Erdos数为1的人合作过的是2；……不属于以上任何一类的就是∞.

- 几乎每一个当代数学家都有一个有限的Erdos数，而且这个数往往非常小
- Fields奖得主的Erdos数都不超过5
- Nevanlinna奖得主的Erdos数不超过3
- Wolf数学奖得主的Erdos数不超过6
- Steele奖的终身成就奖得主的Erdos数不超过4.
- 一些其他领域的专家，
  - Bill Gates，他的Erdos数是4，通过如下途径实现：Erdos--Pavol Hell--Xiao Tie Deng--Chris tos H. Papadimitriou--William H. (Bill) Gates

定理4(举例)

- 例3: 判断下列非负整数列是否可简单图化.
  (1) (5,4,3,2,2,1) (2)(5,4,4,3,2)

(3) (3,3,3,1) (4)(6,6,5,4,3,3,1)

(5) (5,5,3,3,2,2,2)

(6) $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$, $d_1>d_2>\ldots>d_n\geq 1$,

- 解: (1) $5+4+3+2+2+1=17\neq 0 \pmod 2$.

不可(简单)图化.

定理4(举例)

- 例3: 判断下列非负整数列是否可简单图化.
  (2)(5,4,4,3,2)
- 解: (2) 5+4+4+3+2=18=0(mod 2).
  但是$d_1=5>n-1=4$,不满足$n-1\geq d_1$, 不可简单图化.

(或者: 当r=1时, $d_1=5>1(1-1)+\min\{1,4\}+\min\{1,4\}+\min\{1,3\}+\min\{1,2\}=4$, 不可简单图化.)

定理4(举例)

- 例3: 判断下列非负整数列是否可简单图化. (3) (3,3,3,1)
- 解: (3) $3+3+3+1=10=0 \pmod 2$.

  $d_1=3=n-1$,满足$n-1 \geq d_1$,

  但是$r=2$时,

$d_1+d_2=6>2(2-1)+\min\{2,3\}+\min\{2,1\}=5$,
不可简单图化.

定理4(举例)

- 例3: 判断下列非负整数列是否可简单图化.
  (4)(6,6,5,4,3,3,1)
- 解: (4) 6+6+5+4+3+3+1=28=0(mod 2).

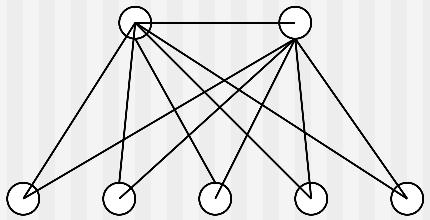
$d_1=6=n-1$,满足$n-1\geq d_1$. r=1,2时,

$d_1=6\leq 1(1-1)+\min\{1,6\}+\min\{1,5\}+\ \ldots=6$,

$d_1+d_2=12>2(2-1)+\min\{2,5\}+\ldots=11$,

不可简单图化.

- 或:6,6,*,*,*,*,1不可简单图化



定理4(举例)

- 例3: (5) (5,5,3,3,2,2,2)
- 解: (5) $5+5+3+3+2+2+2=22=0(\mathrm{mod}\ 2)$.

$d_1=5<n-1$,满足$n-1\geq d_1$. $r=1,2,\ldots,7$时,

$d_1=5<1(1-1)+\min\{1,5\}+\min\{1,5\}+\ \ldots=6$,

$d_1+d_2=10<2(2-1)+\min\{2,3\}+\ldots=12$,

$d_1+d_2+d_3=13<3(3-1)+\min\{3,3\}+\ldots=15$,

$d_1+d_2+d_3+d_4=16<4(4-1)+\min\{4,2\}+\ldots=18$,

定理4(举例)

- 例3: (5) (5,5,3,3,2,2,2)
- 解: (5)

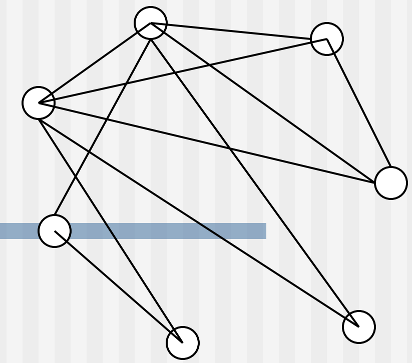
$d_1+d_2+\ldots+d_5=18<5(5-1)+\min\{5,2\}+\ldots=24$,

$d_1+d_2+\ldots+d_6=20<6(6-1)+\min\{6,2\}=32$,

$d_1+d_2+\ldots+d_7=22<7(7-1)=42$,

可简单图化.

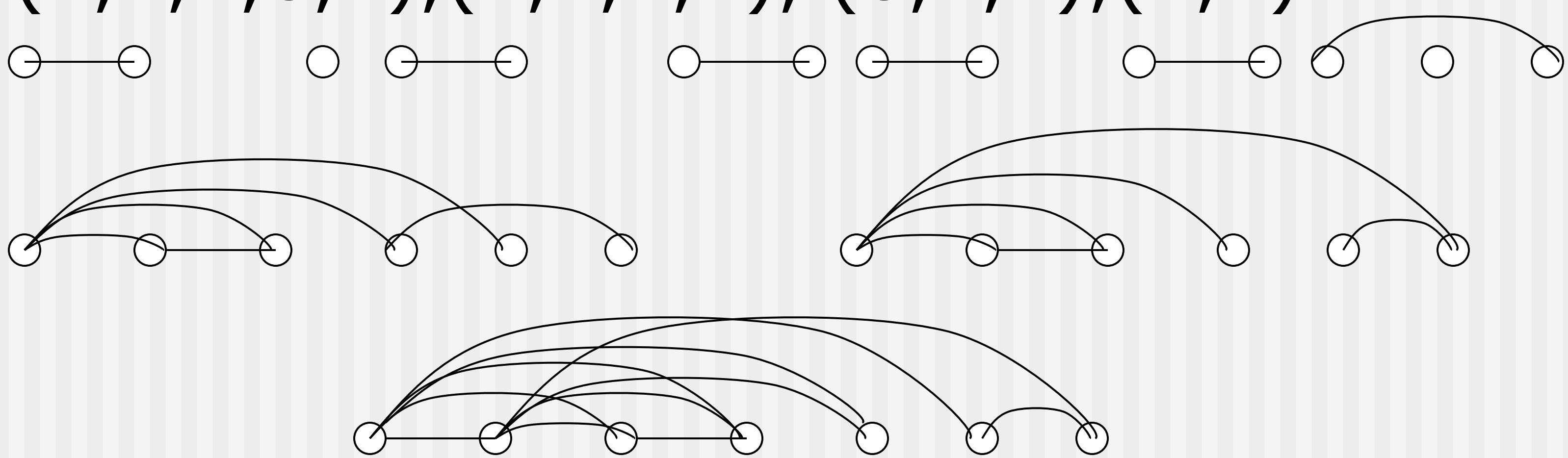
定理4(举例)



- 例3: (5) (5,5,3,3,2,2,2)
- 解: (5) 可简单图化.

(5,5,3,3,2,2,2), (4,2,2,1,1,2), (4,2,2,2,1,1),

(1,1,1,0,1),(1,1,1,1), (0,1,1),(1,1)



定理4(举例)

- 例3: 判断下列非负整数列是否可简单图化.

(6) $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$, $d_1>d_2>\ldots>d_n\geq 1$,

- 解: (6) $d_1>d_2>\ldots>d_n\geq 1$, $d_{n-1}\geq 2$, $d_{n-2}\geq 3,\ldots,$ $d_1\geq n$,不满足$n-1\geq d_1$, 不可简单图化. #

图同构(graph isomorphism)

- 图同构: 设(有向)图$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$, 若存在双射 $f:V_1\to V_2$, 满足 $\forall u\in V_1,\forall v\in V_1$,

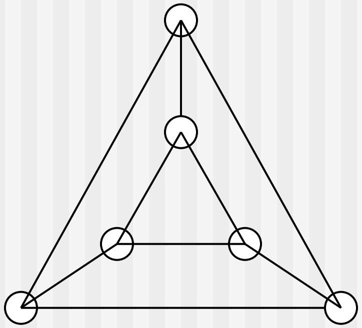
  $$(u,v)\in E_1 \leftrightarrow (f(u),f(v))\in E_2$$

  且$<u,v>$与$<f(u),f(v)>$重数相同,

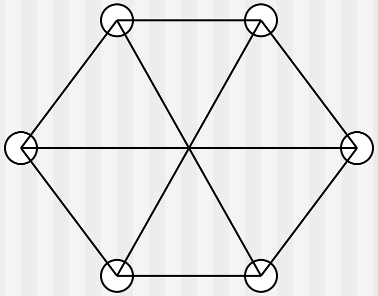
则称G_1与G_2同构, 记作$G_1\cong G_2$

- 算法：NAUTY

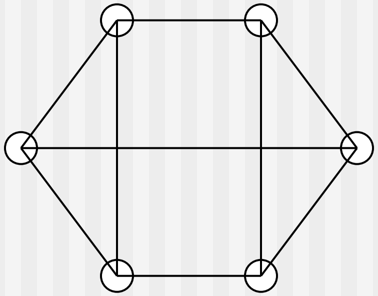
图同构(举例)



G_1



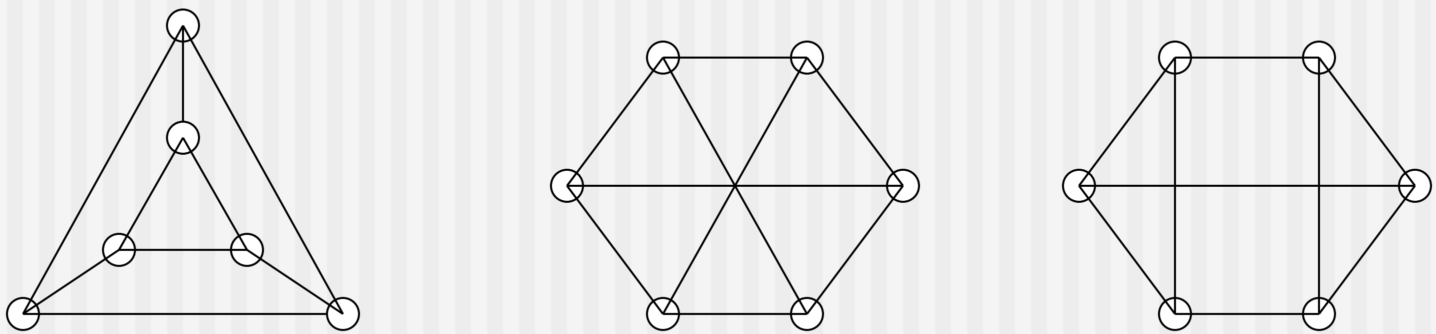
G_2



G_3

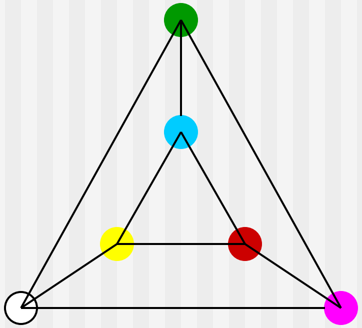
$$G_1 \cong G_3, \quad G_1 \ncong G_2$$

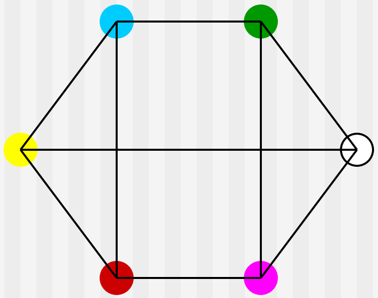
图同构(举例)



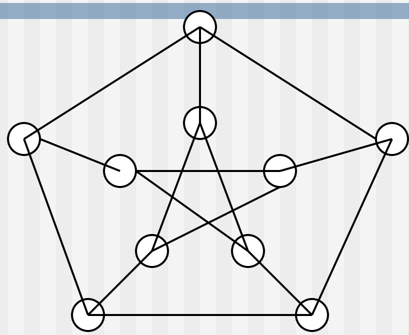
G_1 G_2 G_3

$$G_1 \cong G_3, \quad G_1 \ncong G_2$$

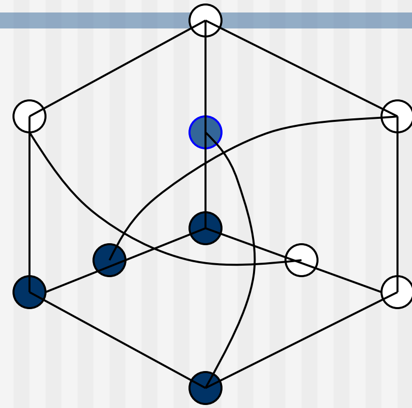




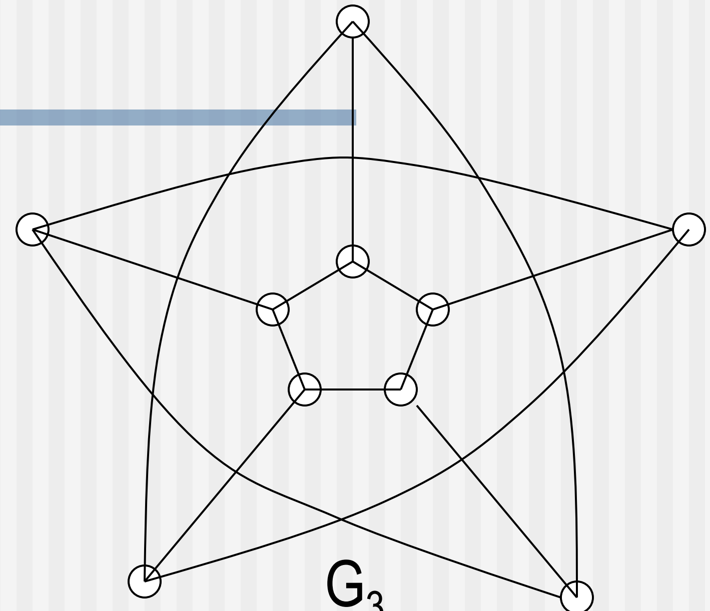
图同构(举例)



G_1



G_2

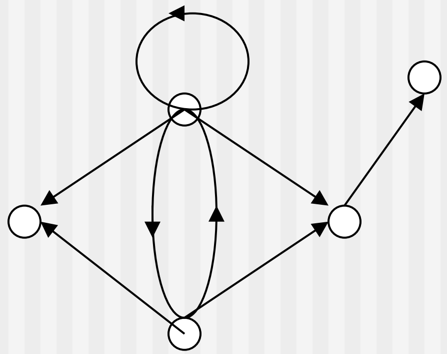


G_3

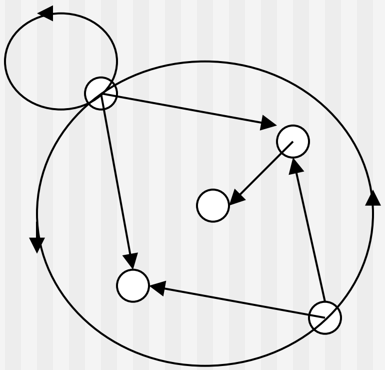
彼得森(Peterson)图

$$G_1 \cong G_2 \cong G_3$$

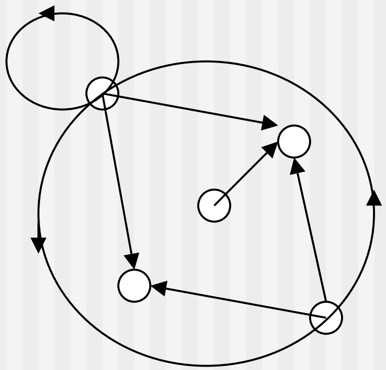
图同构(举例)



D_1



D_2



D_3

$D_1 \cong D_2$， $D_2 \ncong D_3$

同构关系

- 同构关系是全体图集合上的二元关系
  - 自反的
  - 对称的
  - 传递的
- 同构关系是等价关系

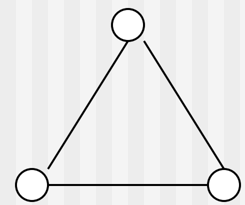
图族(graph class)

- 完全图,有向完全图,竞赛图
- 正则图：柏拉图图,彼德森图,库拉图斯基图
- r部图,二部图(偶图),完全r部图
- 路径,圈,轮

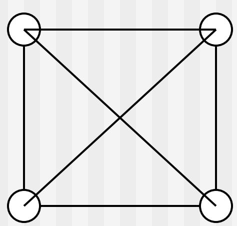
完全图(complete graphs)

K_1

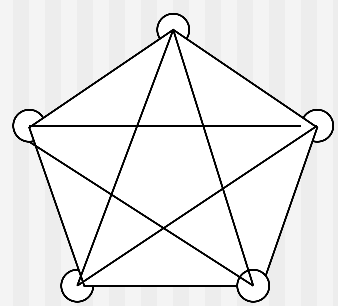
K_2



K_3



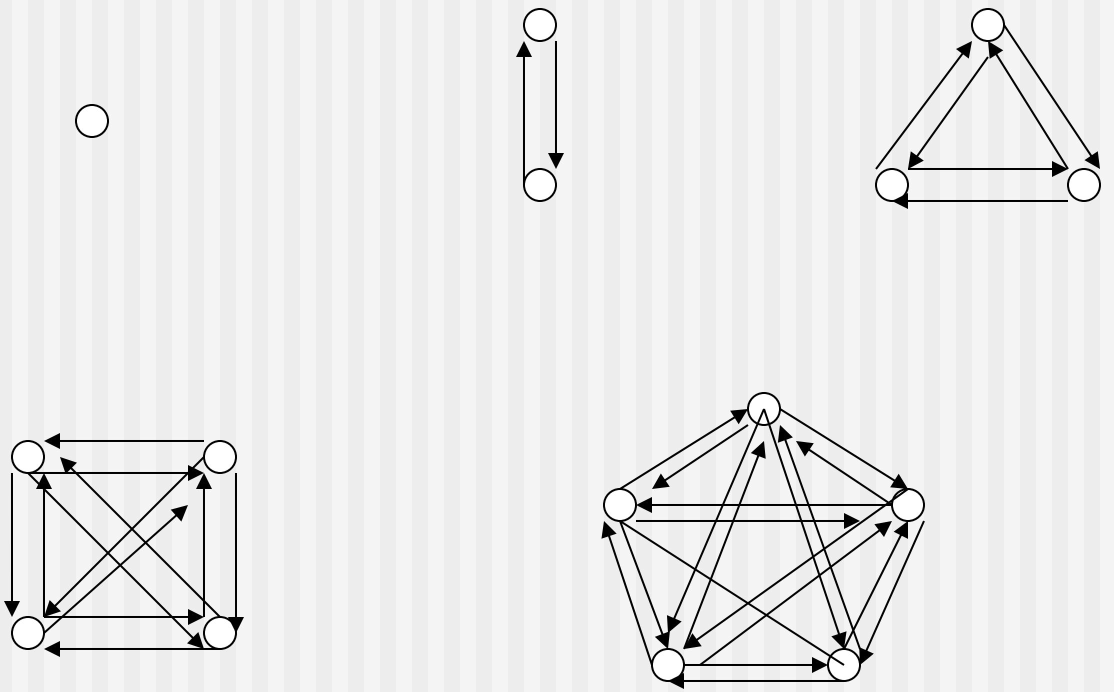
K_4



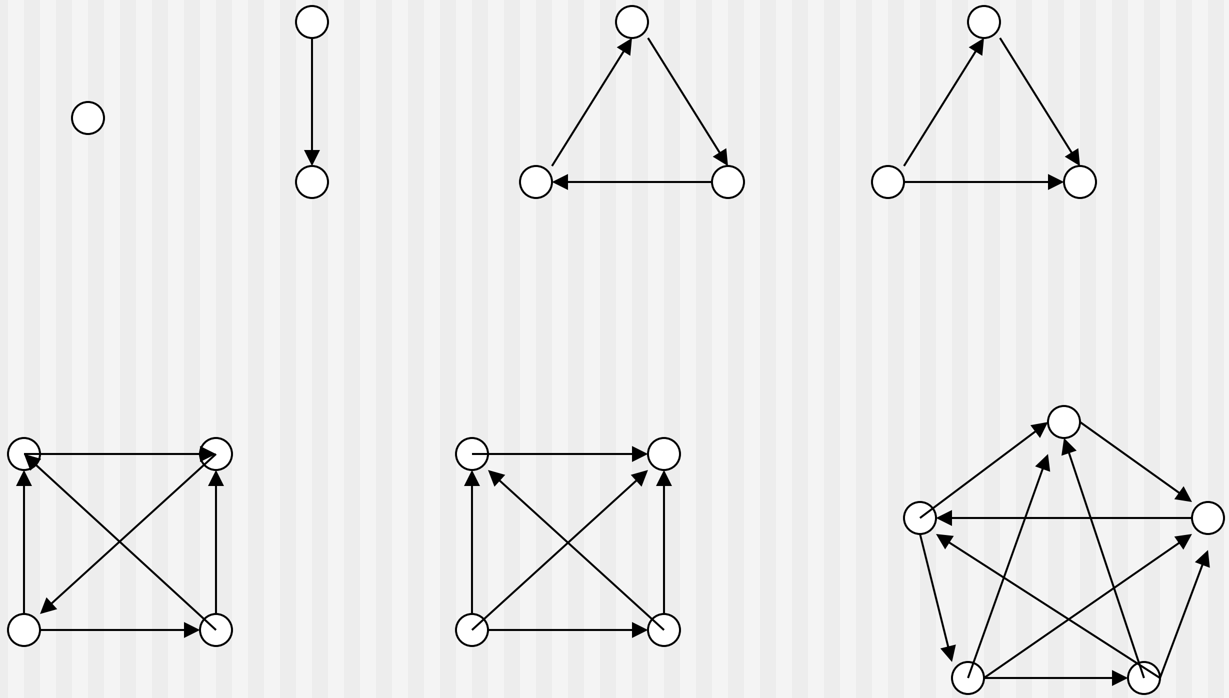
K_5

每个顶点均与其余的n-1个顶点相邻,记作$\mathbf{K_n}$

有向完全图

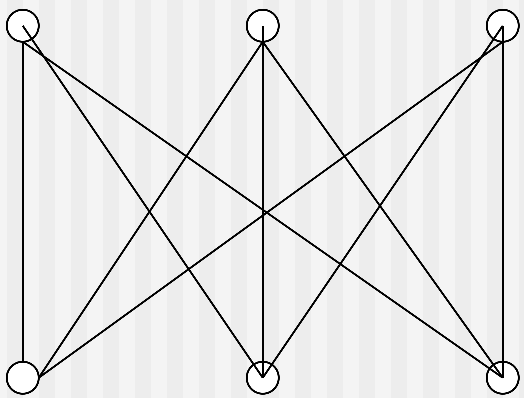


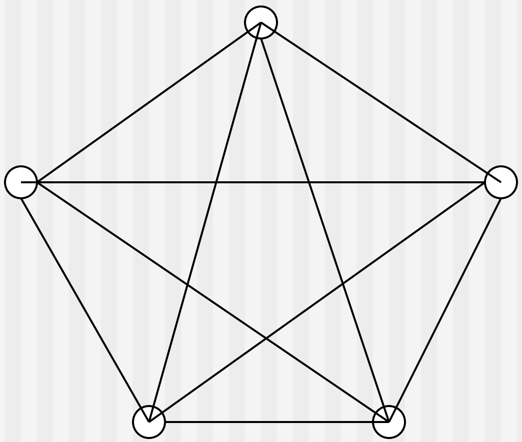
竞赛图(tournament)



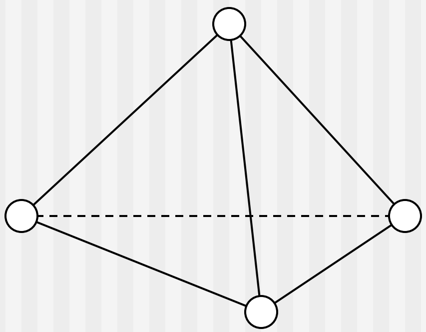
正则图(regular graph)

- k正则图: $\forall v \in V(G)$, $d(v)=k$, $r=0,1,2,\ldots$
- 完全图K_n是n-1正则图$(n=1,2,3,\ldots)$

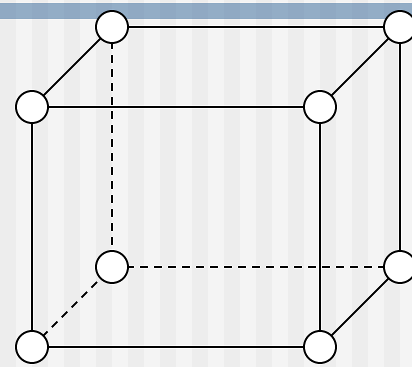




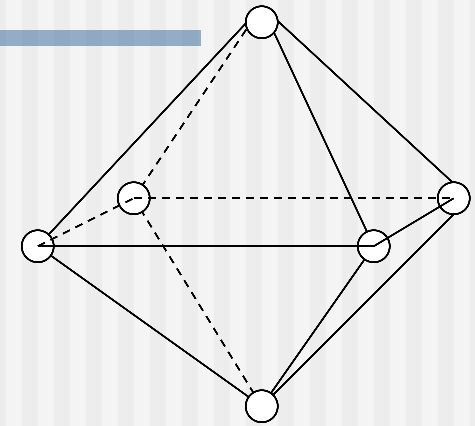
柏拉图图(Platonic graphs)



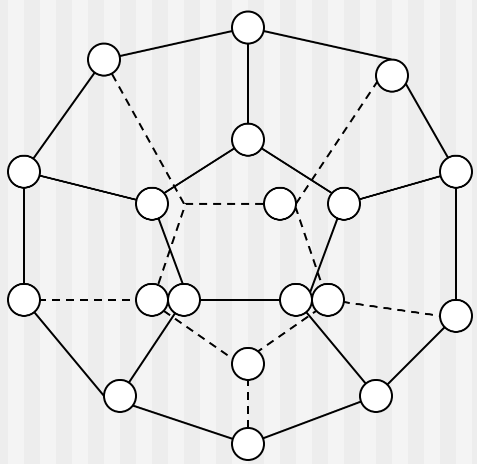
正四面体图



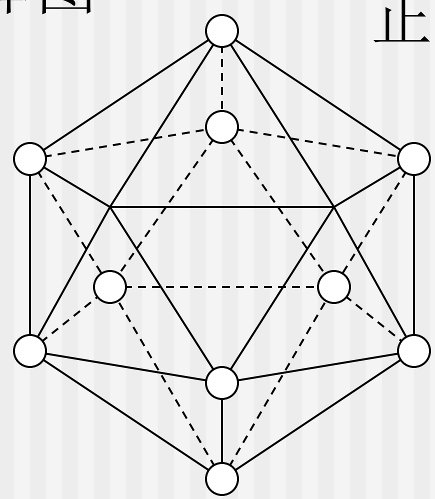
正六面体图



正八面体图

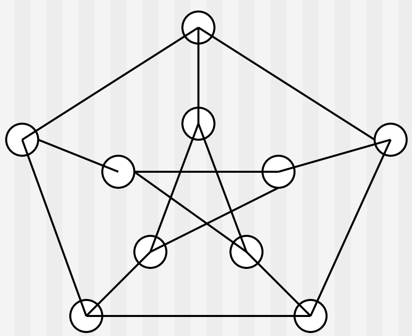


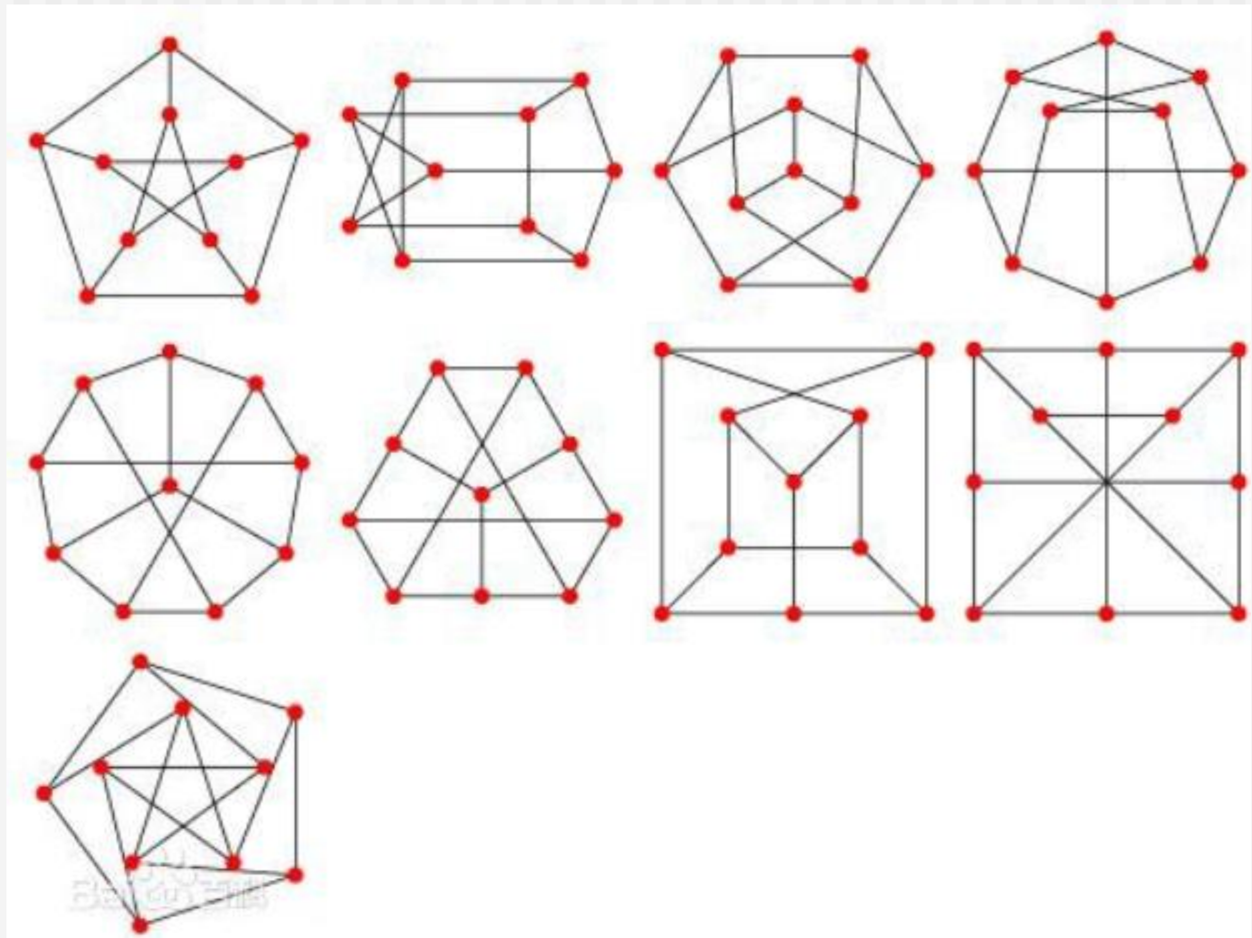
正十二面体图



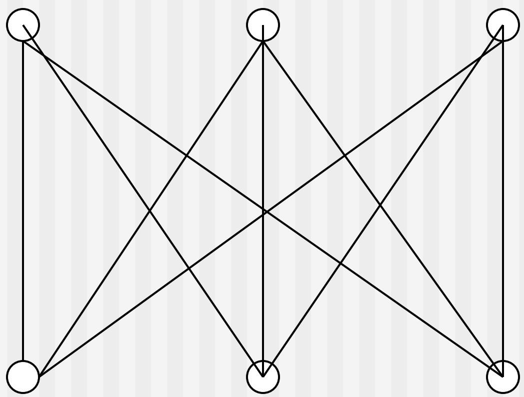
正二十面体图

彼德森图(Pertersen graph)

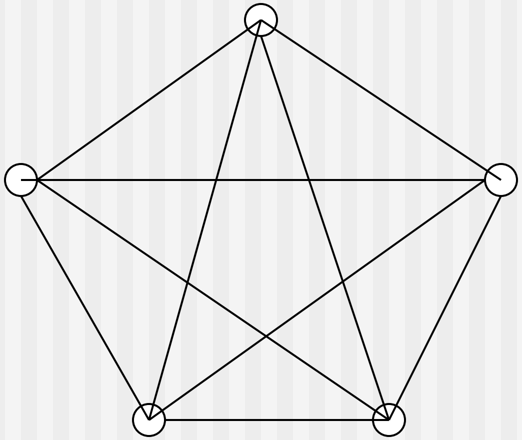




库拉图斯基图(Kuratowski graph)



$K_{3,3}$



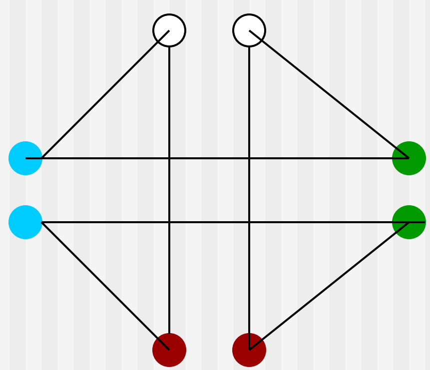
K_5

r部图(r-partite graphs)

- r部图: $G=<V,E>$,若V分成r个互不相交的子集,使得G中任何一条边的两个端点都不在同一个V_i中, 即

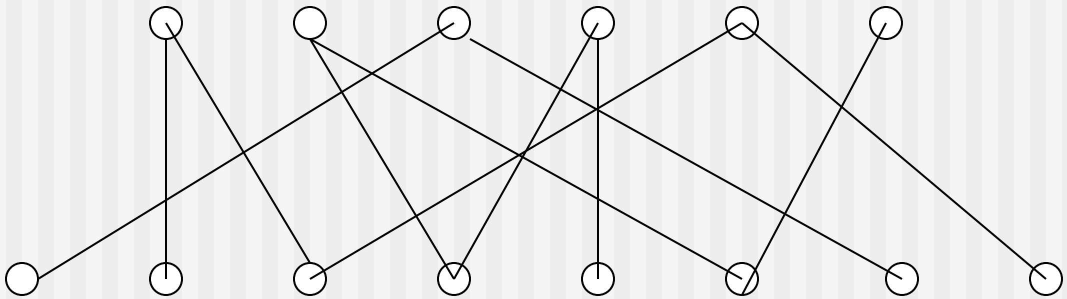
$V=V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_r$, $V_i\cap V_j=\varnothing\ (i\neq j)$,$E\subseteq U(V_i\&V_j)$

- 也记作 $G=<V_1,V_2,\ldots,V_r\,;\,E>$.

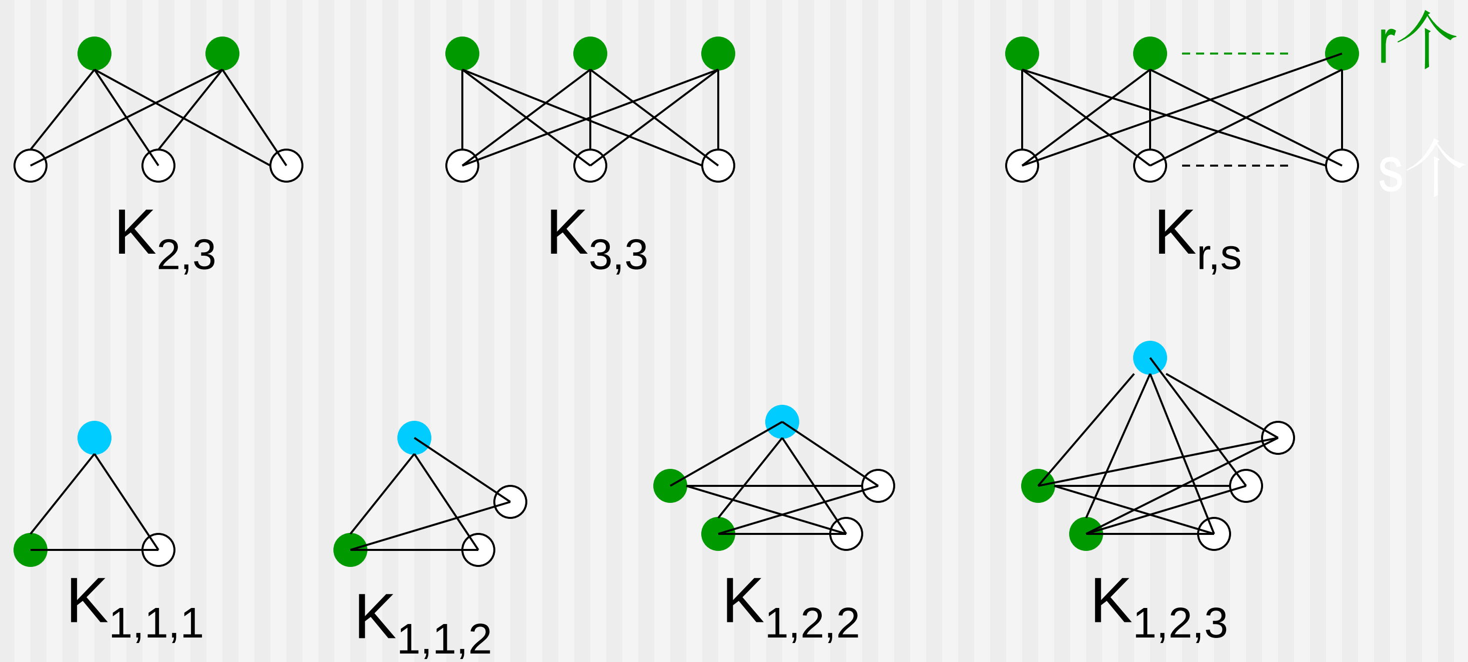


二部图(偶图)(bipartite graphs)

- 二部图: $G=<V_1,V_2;\ E>$, 也称为偶图

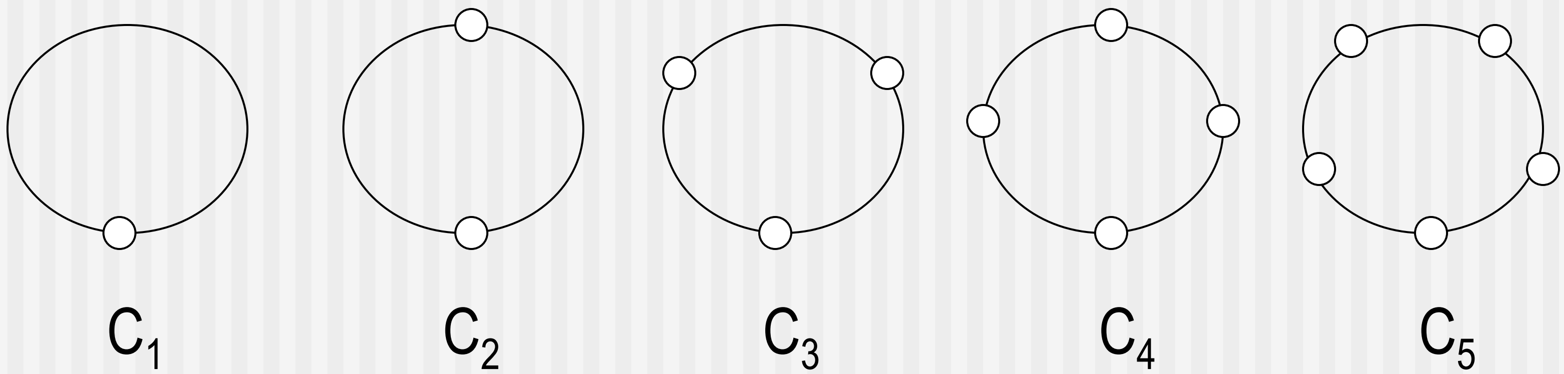


完全r部图(complete r-partite graphs)

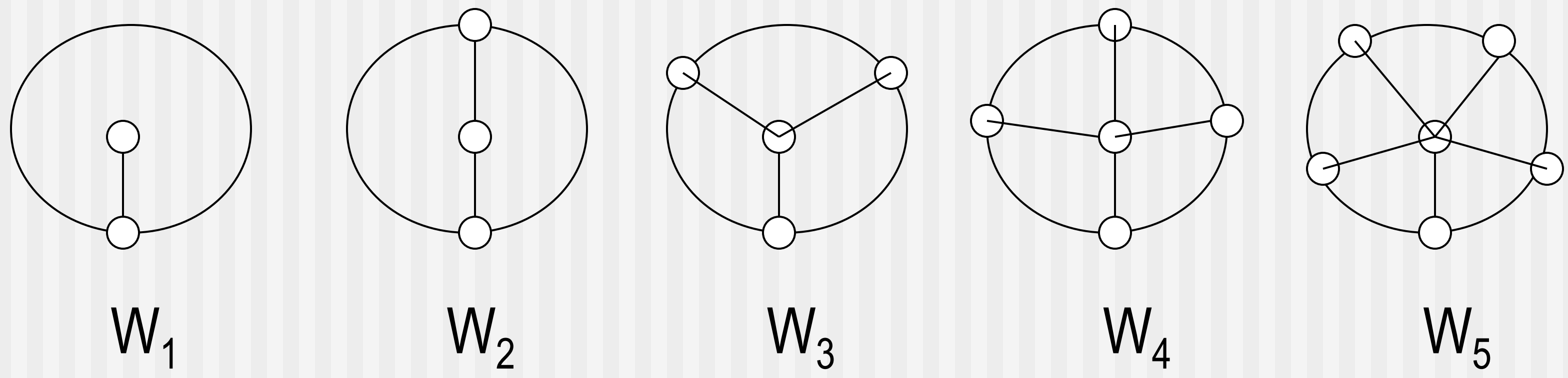


$\mathbf{K_{n1,n2,\ldots,nr}}$: V_i中任一个顶点均与$V_j(i\neq j)$所有顶点相邻

圈(cycles)

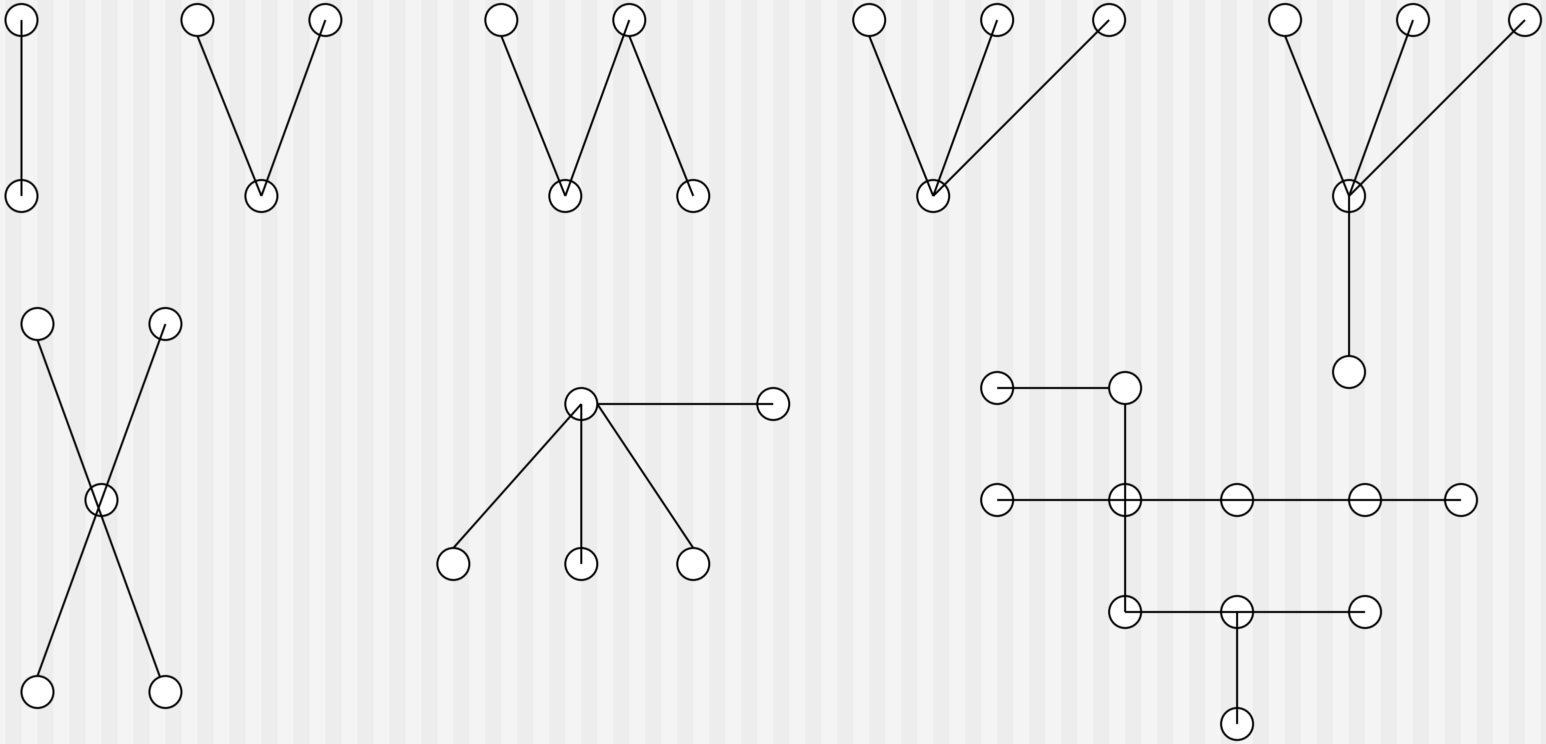


轮(wheels)



树(trees)

- 树：连通无回图



子图,生成子图

- 子图(subgraph): $G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$,

  $$G'\subseteq G \Leftrightarrow V'\subseteq V \wedge E'\subseteq E$$

- 真子图(proper subgraph):

  $$G'\subset G \Leftrightarrow G'\subseteq G \wedge (V'\subset V \vee E'\subset E)$$

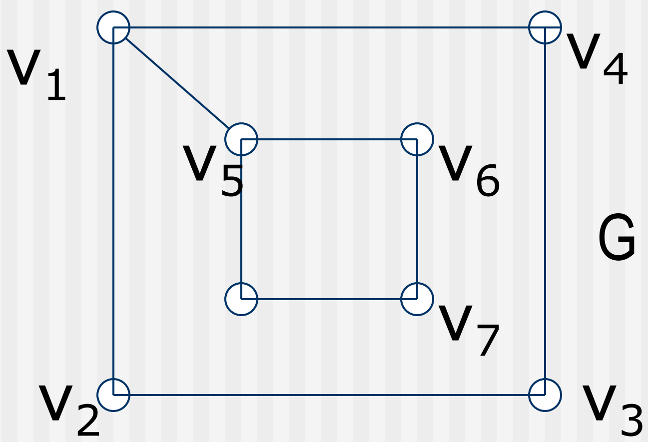
- 生成子图(spanning subgraph):

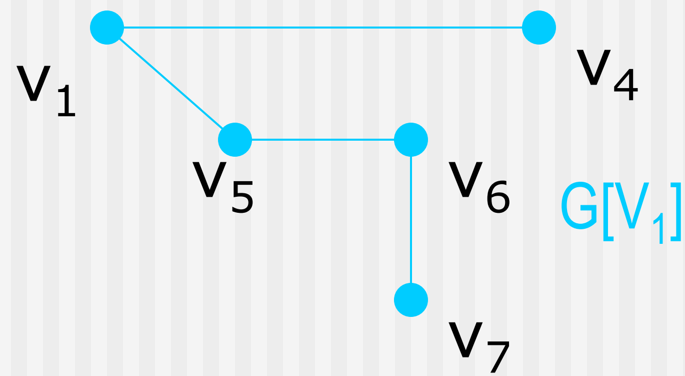
  G'是G的生成子图 $\Leftrightarrow G'\subseteq G \wedge V'=V$

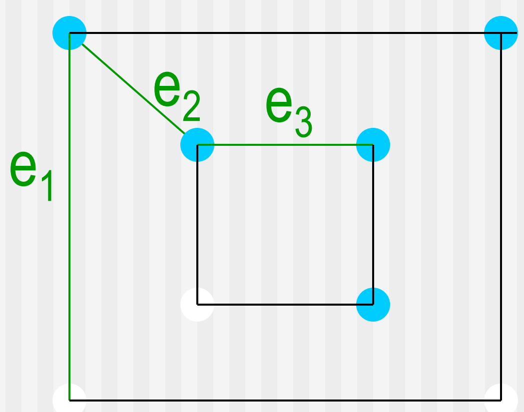
导出子图(induced subgraph)

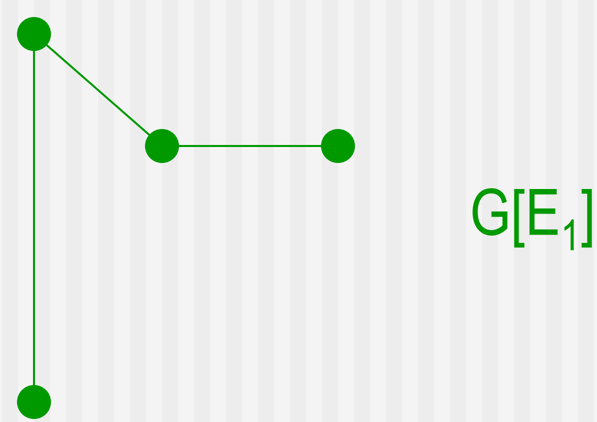
- 导出子图: G=<V,E>,
- 若$V_1 \subset V$, 以G中两个端点都在V_1中的边组成边集E_1的图,即$E_1 = E \cap V_1 \& V_1$,$G[V_1] = <V_1,E_1>$为由V_1导出的子图
- 若$\emptyset \neq E_1 \subset E$, 以$E_1$中的边关联的点为顶点集$V_1$, 则称$G[E_1] = <V_1,E_1>$为由$E_1$导出的子图

导出子图(举例)



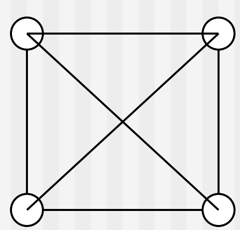


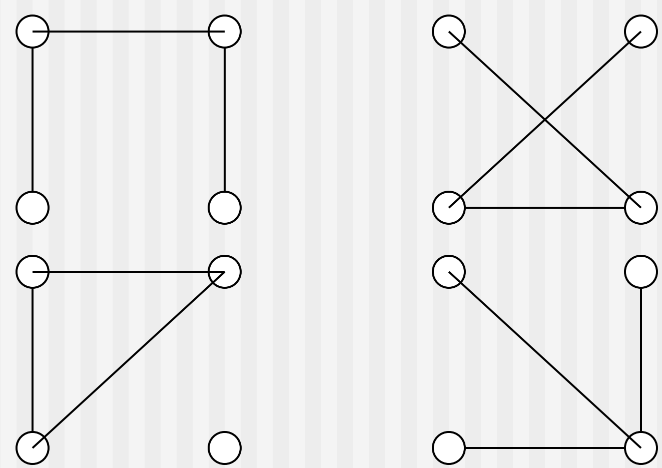




补图(complement graph)

- 补图：以V为顶点集,以使G称为n阶完全图的所有添加边组成的集合为边集的图,为G的补图, 即$G=\langle V,E\rangle$, $\overline{G}=\langle V,E(K_n)-E\rangle$
- 自补图(self-complement graph):$\overline{G}\cong G$





例5

- 例5: (1) 画出5阶4条边的所有非同构的无向简单图; (2)画出4阶2条边的所有非同构的有向简单图.

解: (1) $\Sigma d(v)=2m=8$, $\Delta \le n-1=4$,

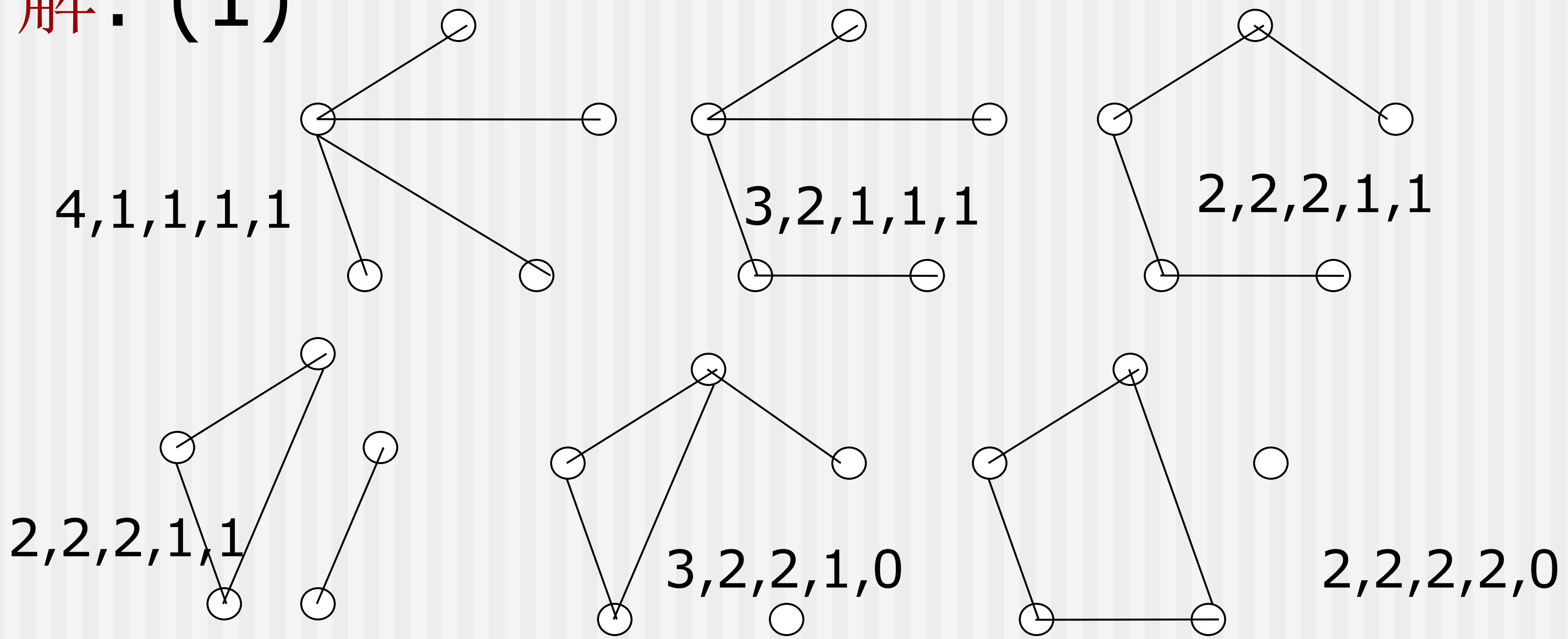
(4,1,1,1,1),(3,2,1,1,1),(2,2,2,1,1),
(3,2,2,1,0),(2,2,2,2,0)

(2) $\Sigma d^+(v)=\Sigma d^-(v)=m=2$, $\Sigma d(v)=2m=4$,

(2,1,1,0),(1,1,1,1),(2,2,0,0)

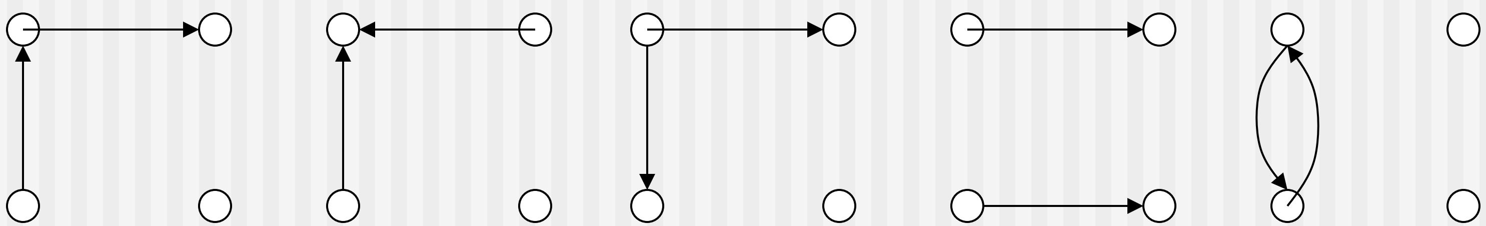
例5(1)

- 例5: (1) 画出5阶4条边的所有非同构的无向简单图;
- 解: (1)



例5(2)

- 例5: (2)画出4阶2条边的所有非同构的有向简单图.
- 解: (2)



2,1,1,0　2,1,1,0　2,1,1,0　1,1,1,1　2,2,0,0

图的运算

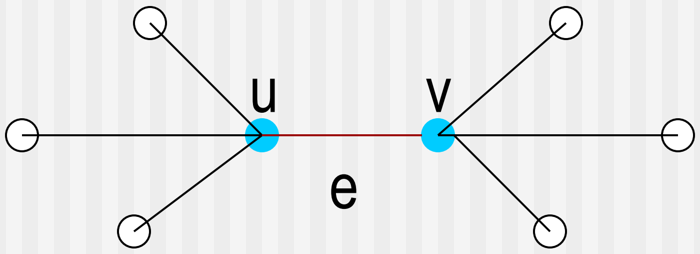
- 删除,收缩,加新边,不交
- 并图,交图,差图,环和
- 联图,积图

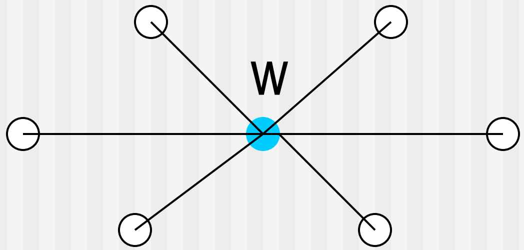
删除(delete)

- 删除边e: G-e = < V, E-{e} >
- 删除边集E': G-E' = < V, E-E' >,
- 删除顶点v以及v所关联的所有边:G-v = < V-{v}, E-I_G(v) >,
- 删除顶点集V'以及V'所关联的所有边:G-V' = < V-V', E-I_G(V') >,

收缩(contract)

- G\e: e=(u,v)∈E, 删除e,将e的两个端点u与v用一个新的顶点w代替,使w关联除e之外的u,v关联的所有边





加新边(add new edge)

- $G \cup (u,v) = \langle V, E \cup \{(u,v)\} \rangle$，在u与v之间加新边
- 也写成$G+(u,v)$

不交(non-intersect)

- $G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$,
- G_1与G_2不交 $\Leftrightarrow$ $V_1 \cap V_2=\varnothing$
- G_1与G_2边不交(边不重) $\Leftrightarrow$ $E_1 \cap E_2=\varnothing$

并图,交图,差图,环和(ring sum)

$G_1=\langle V_1,E_1\rangle$, $G_2=\langle V_2,E_2\rangle$, 都无孤立点

- 并图: 以$E_1\cup E_2$为边集,以$E_1\cup E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图,即:

  $G_1\cup G_2=\langle V(E_1\cup E_2), E_1\cup E_2\rangle$

- 交图: $G_1\cap G_2=\langle V(E_1\cap E_2), E_1\cap E_2\rangle$
- 差图: $G_1-G_2=\langle V(E_1-E_2), E_1-E_2\rangle$
- 环和: $G_1\oplus G_2=\langle V(E_1\oplus E_2), E_1\oplus E_2\rangle$

  $=(G_1\cup G_2)-(G_1\cap G_2)$

性质

- $G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$
- $G_1 = G_2$时,

$G_1 \cup G_2 = G_1 \cap G_2 = G_1 = G_2$

$G_1 \oplus G_2 = G_1 - G_2 = \varnothing$

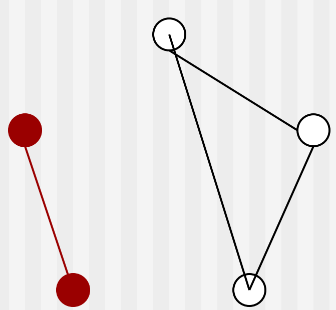
G_1与G_2边不重时,

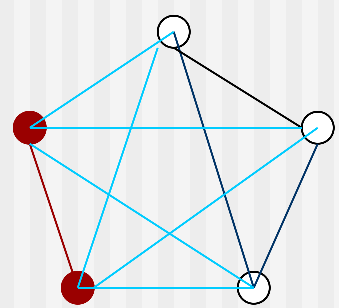
$G_1 \cap G_2 = \varnothing$, $G_1 - G_2 = G_1$, $G_2 - G_1 = G_2$,

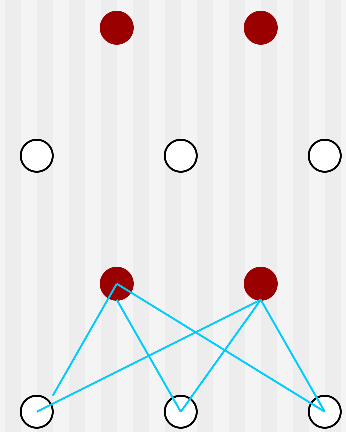
$G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$

联图(join)

- 联图: $G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$, 不交的无向图, 以$V_1 \cup V_2$为顶点集, $E=E_1 \cup E_2 \cup \{(u,v) \mid (u \in V_1) \wedge (v \in V_2)\}$为边集的图, 记作: G_1+G_2
- $K_r+K_s=K_{r+s}$　　　　$N_r+N_s=K_{r,s}$
- 若$|V_1|=n_1$, $|E_1|=m_1$, $|V_2|=n_2$, $|E_1|=m_2$, $n=n_1+n_2$, $m=m_1+m_2+n_1n_2$







积图(product)

- $G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$, 无向简单图
- 积图: $G_1 \times G_2=<V_1 \times V_2, E>$, 其中

$E = \{ (<u_i,u_j>,<v_k,v_s>) \mid$

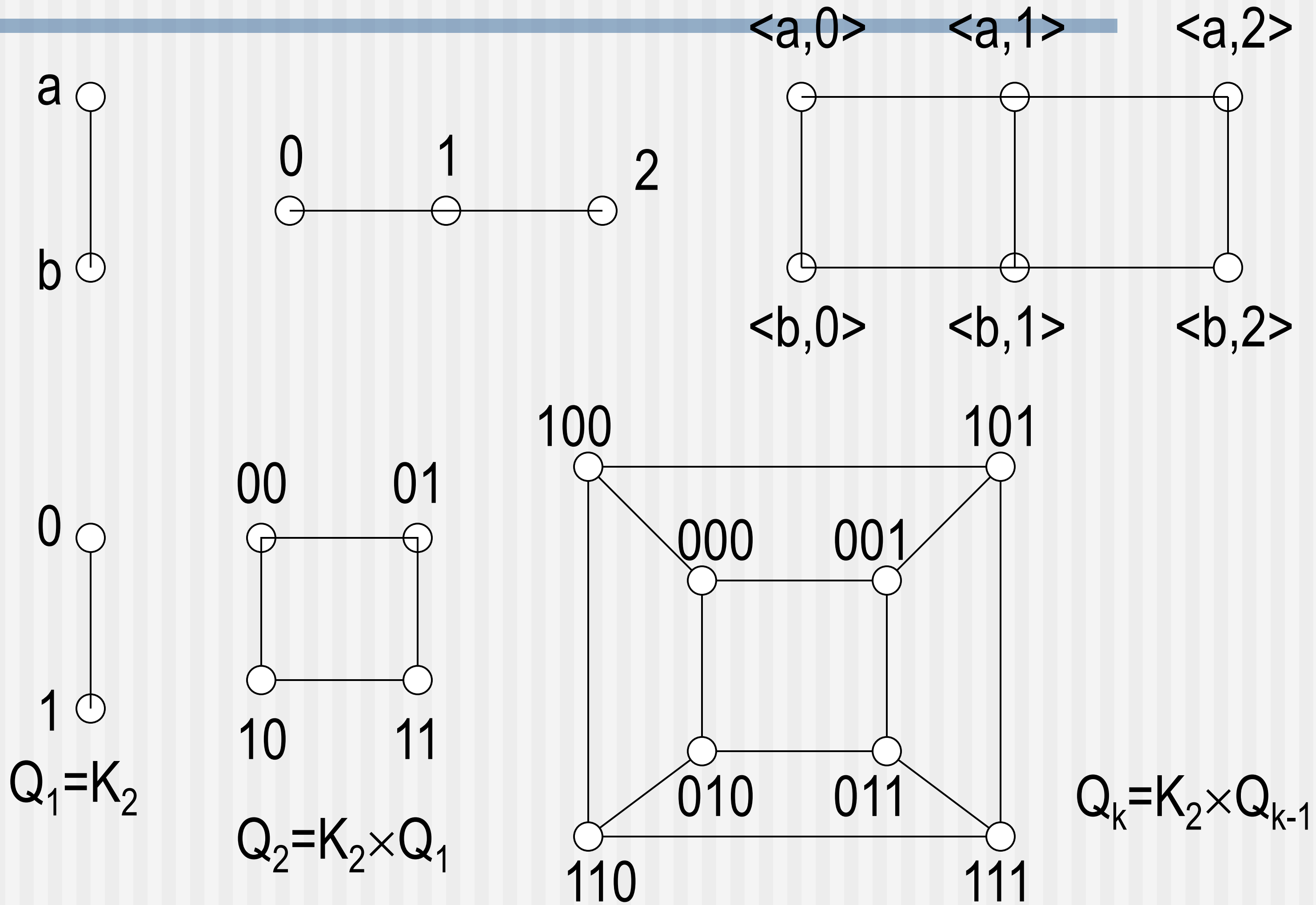
$(<u_i,u_j>,<v_k,v_s> \in V_1 \times V_2) \wedge$

$((u_i=v_k \wedge u_j$ 与 v_s 相邻$) \vee (u_j=v_s \wedge u_i$ 与 v_k 相邻$))\}$

- 若 $|V_i|=n_i$, $|E_i|=m_i$,

$n=n_1 n_2$, $m=n_1 m_2+ n_2 m_1$

积图(举例)


a
b
0
1
2
<a,0>
<a,1>
<a,2>
<b,0>
<b,1>
<b,2>
0
1
$Q_1=K_2$
00
01
10
11
$Q_2=K_2\times Q_1$
100
101
000
001
010
011
110
111
$Q_k=K_2\times Q_{k-1}$

总结

- 1.预备知识,无向图,有向图,相邻,关联
- 2.度,握手定理,度数列,可(简单)图化
- 3.图同构
- 4.图族
- 5.图运算

作业

- P131: 1，2，3，5 ，11