第5章 基数

- 集合的等势
- 有穷集合与无穷集合
- 基数的概念
- 基数的比较
- 基数运算

两个基本过程

- 匹配(matching): 多少,大小(基数)----双射

  $\{a\} \to \{0\} \qquad =1$

  $\{a,b\} \to \{0,1\} \quad =2$

  $\{a,b,c\} \to \{0,1,2\} =3\ldots$

- 计数(counting): 首尾,先后(序数)----良序

  $0\to1\to2\to3\to\ldots$

  $a\to b$

  $c\to b\to a$

  ……

等势(same cardinality)

- 等势：设A,B为两个集合，若存在从A到B的双射函数，则称A与B是等势的.

$$A \approx B \Leftrightarrow \exists \text{双射 } f:A \rightarrow B$$

证明等势 $\Leftrightarrow$ 构造双射

- 直接构造双射
- 间接构造双射

例5.1

- $N \approx N_{偶}$
- $N \approx N_{奇}$
- $N \approx N_2^n$

例5.1

- $N \approx N_{偶} = \{ n \mid n \in N \wedge n为偶数\}$

  $f: N \to N_{偶}, f(n)=2n$
- $N \approx N_{奇} = \{ n \mid n \in N \wedge n为奇数\}$

  $g: N \to N_{奇}, g(n)=2n+1$
- $N \approx N_{2^n} = \{ x \mid x=2^n \wedge n \in N \}$

  $h: N \to N_{2^n}, h(n)=2^n$
- 容易证明, f,g,h都是双射

定理5.1

- (1) $Z \approx N$
- (2) $N \times N \approx N$
- (3) $N \approx Q$
- (4) $(0,1) \approx R$
- (5) $[0,1] \approx (0,1)$

(1)证明 Z ≈ N

- (1) Z ≈ N
- 证明: 取f: Z→N,

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 2n, & n>0 \\ 2|n|-1, & n<0 \end{cases}$$

容易证明, f是双射.

∴ Z ≈ N #

(2) 证明$N \times N \approx N$

- (2) $N\times N \approx N$

- 证明: 例3.6, $f:N\times N\rightarrow N$,

(1)自然数表示; (2)对角线法

$$f(<i,j>)=2^i(2j+1)-1$$

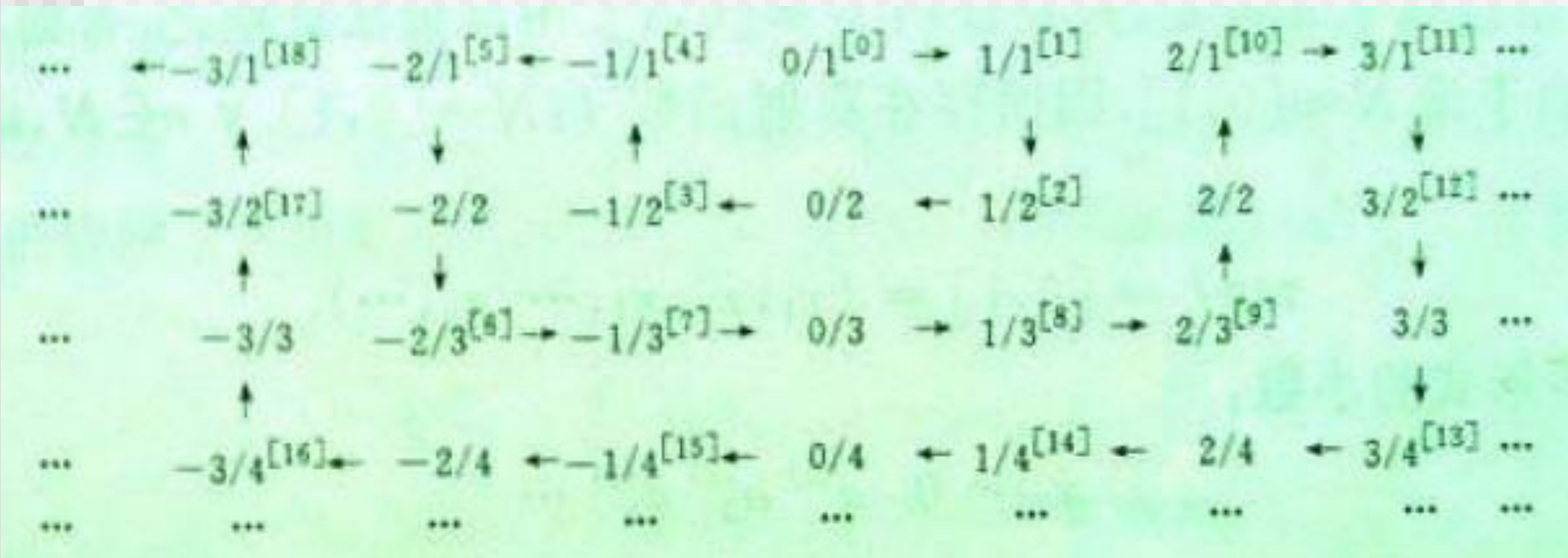
#

(3) 证明 $Q \approx N$

- $N \approx Q$
- 证明:因为任何有理数都可以表示成分数，
  即$\forall m \in Z$, $\forall n \in N-\{0\}$, m/n，从而找出全体既约分数，它们表示出了全体有理数，并编号。

(3) 证明N ≈Q (续)

- 证明: f:N→Q, f(n)=编号[n]的既约分数
- m/n, m为整数作分子; n∈ N-{0}作分母

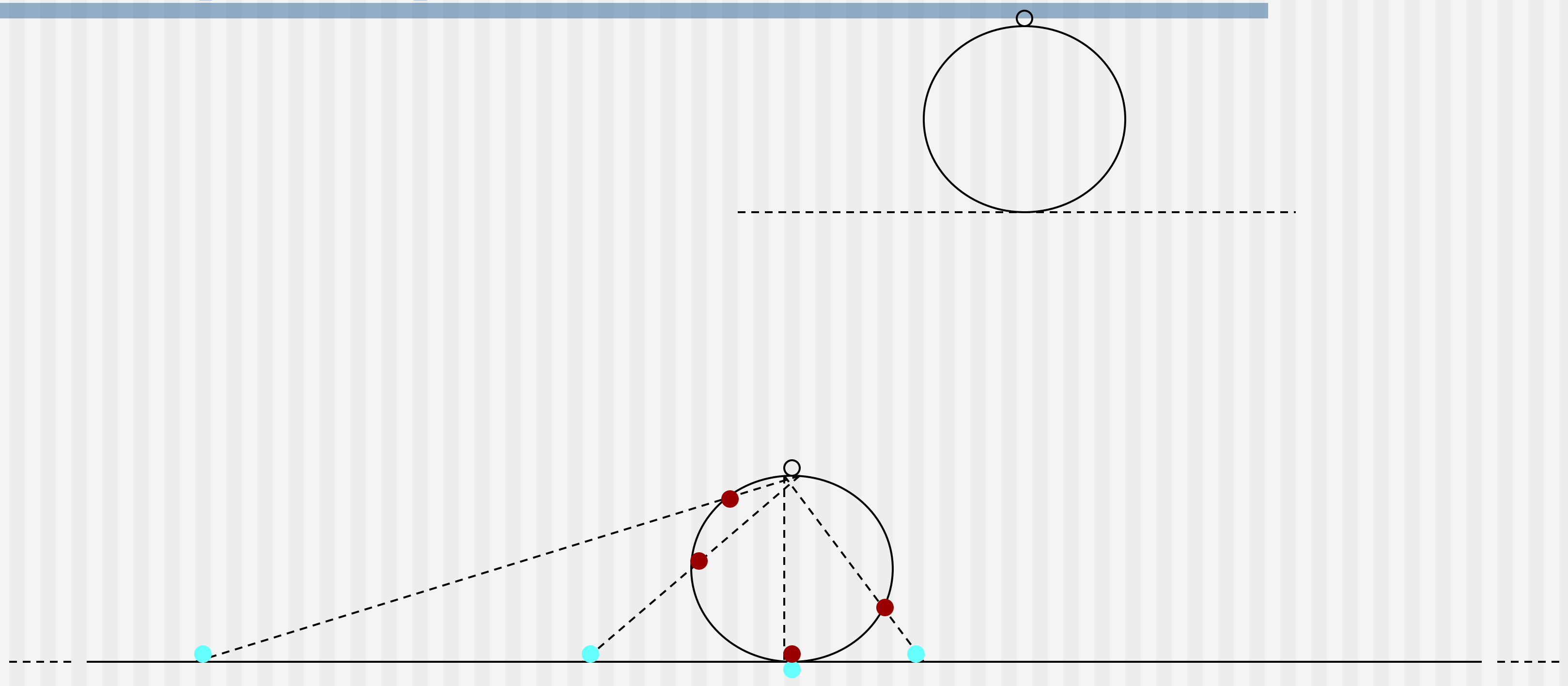


(4) 证明$(0,1) \approx R$

- (4) $(0,1) \approx R$
- 证明：$f: (0,1) \to R$, $\forall x \in (0,1)$

  $f(x) = tg\ (x-1/2)\pi$

R≈(0,1)



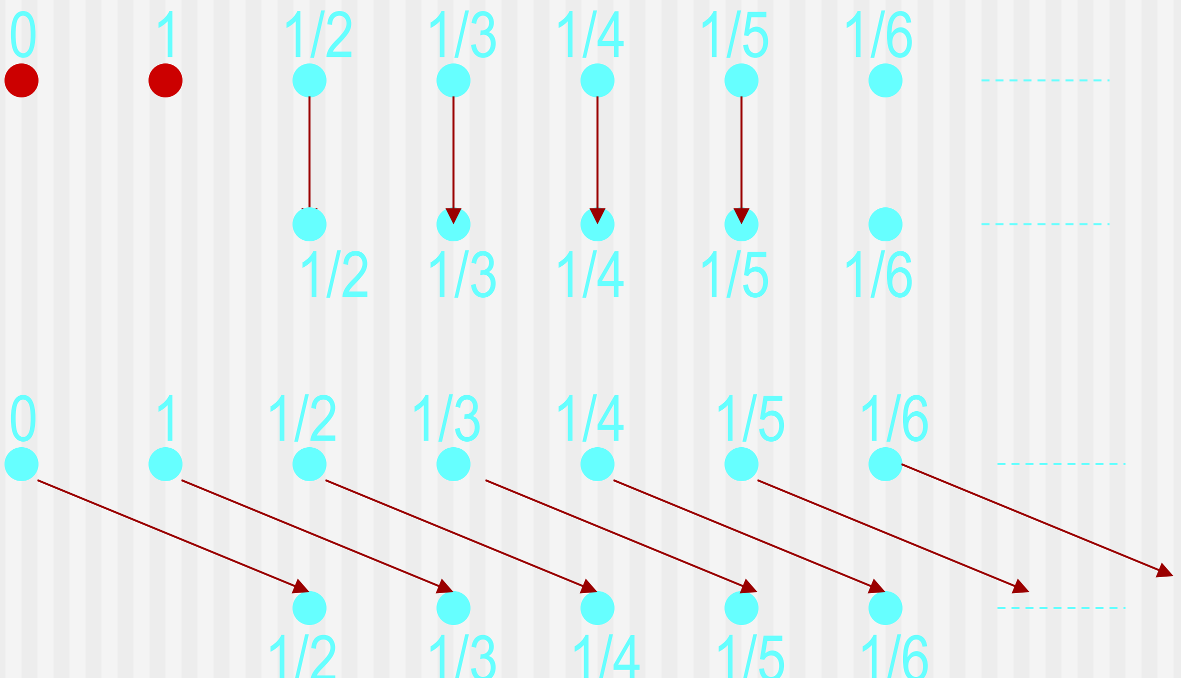
(5) 证明$[0,1]\approx(0,1)$

- 证明(1): $f: [0,1]\to(0,1)$,

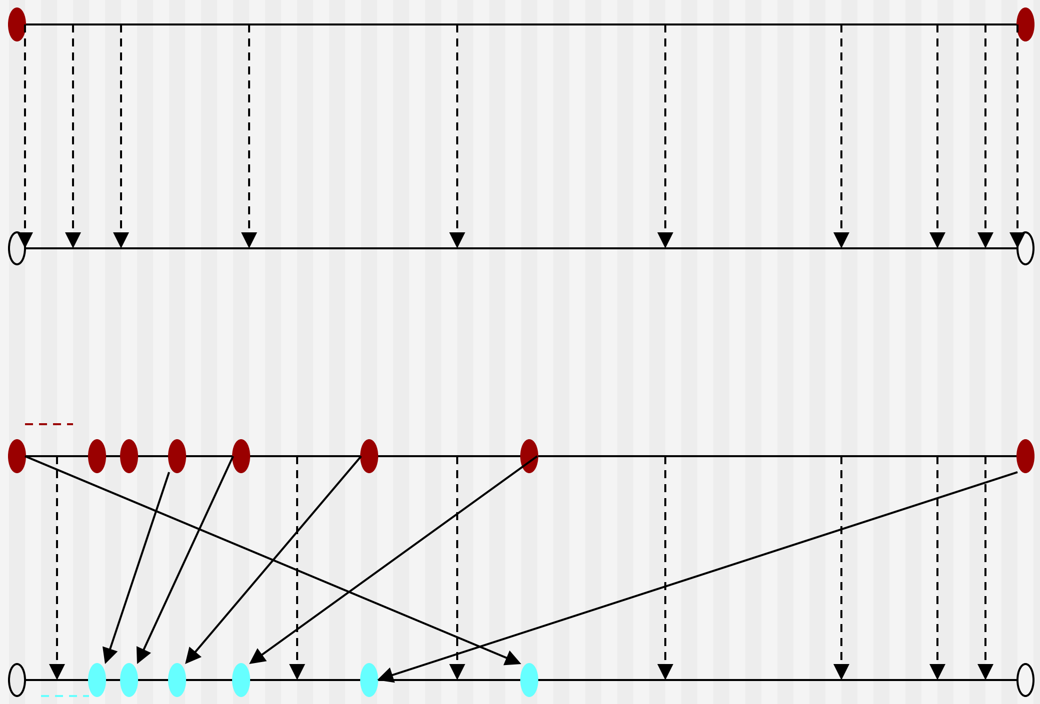
$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & x=0 \\ 1/(n+2), & x=1/n,\ n\in N-\{0\} \\ x, & \text{其他} \end{cases}$$

可以证明f是双射,

$\therefore [0,1]\approx(0,1)$ #


0
1
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
0
1
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6

[0,1]≈(0,1)



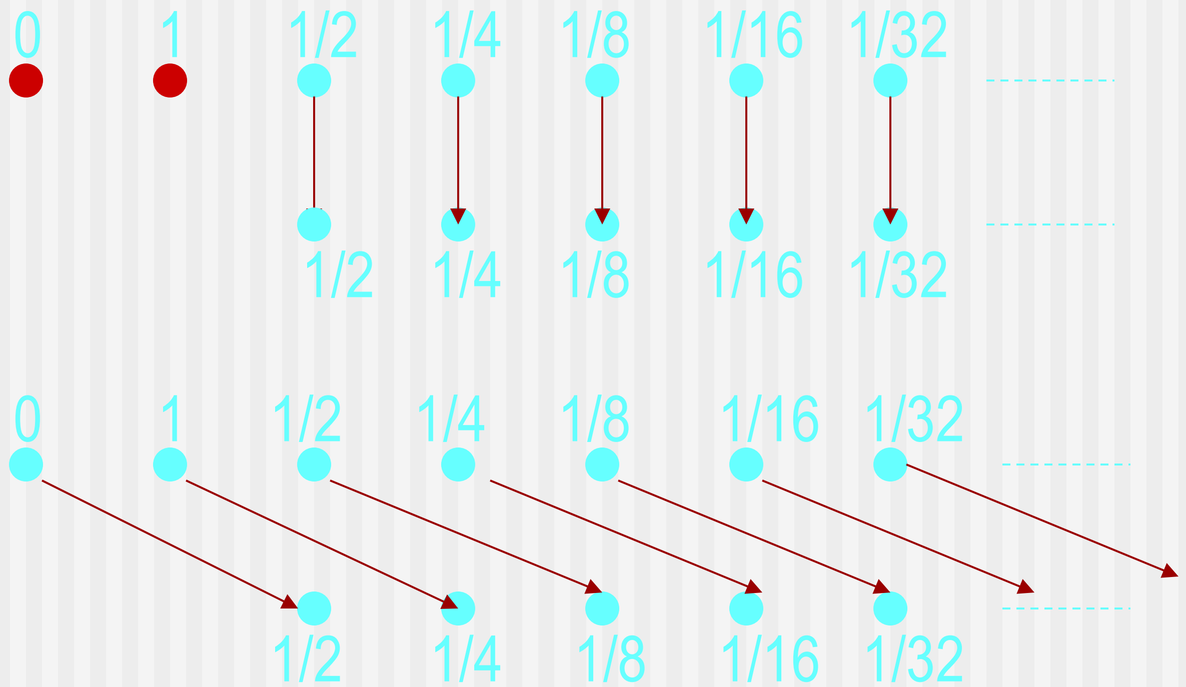
证明[0,1]≈(0,1)续

- 证明(2): f: [0,1]→(0,1),

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & x=0 \\ 1/4, & x=1 \\ 1/2^{(n+2)}, & x=1/2^n,\ n\in N-\{0\} \\ x, & \text{其他} \end{cases}$$

可以证明f是双射,

∴[0,1]≈(0,1) #


0
1
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
0
1
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32

Hilbert旅馆问题

1, 2, 3, 4, 5, 6,…

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$

问下列情况是否能把新来的人安排下：

1 又来了有限个人$\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$

2 每个人带一个亲戚$\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots\}$

Hilbert旅馆问题解答

1 $b_1, b_2, \ldots, b_n, a_1, a_2, a_3, \ldots$

$1, 2, \ldots, n, n+1, n+2, n+3, \ldots$

2 $b_1, a_1, b_2, a_2, b_3, a_3, \ldots$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

定理5.2

- 定理5.2 设A为任意的集合,则 $P(A) \approx (A \to 2)$, 其中$(A \to 2)$为2^A,即A到$2=\{0,1\}$的全体函数

- $2^A = A \to 2 = \{ f \mid f{:}A \to \{0,1\} \}$ (全函数)

$P(A)\approx 2^A$

- 证明: 令$f:P(A)\to 2^A$, $f(B)=\chi_B$, 其中χ_B是B的特征函数, $\chi_B:A\to\{0,1\}$, $\chi_B(x)=1\Leftrightarrow x\in B$.

  (1) f是单射,设$B_1,B_2\subseteq A$且$B_1\neq B_2$, 则

  $f(B_1)=\chi_{B1}(x)\neq\chi_{B2}(x)=f(B_2)$, 故$\chi_{B1}\neq\chi_{B2}$.

  (2) f是满射. 任给$\chi_B:A\to\{0,1\}$, 令

  $B=\{\ x\in A\ |\ \chi(x)=1\ \}\subseteq A$, 则$f(B)=\chi_B$. #

定理5.3

- 对任意集合A,B,C,
- (1) $A \approx A$
- (2) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$
- (3) $A \approx B \land B \approx C \Rightarrow A \approx C$

- 等势关系为等价关系，可以用来分类

定理5.3证明

- 自反: A≈A
  - 证明: I_A :A→A双射
- 对称: A≈B ⇒B≈A
  - 证明: f:A→B双射⇒f^{-1}:B→A双射
- 传递: A≈B∧B≈C ⇒A≈C
  - 证明: f:A→B, g:B→C双射⇒g○f:A→C双射

- $\mathbf{N} \approx \mathbf{Z} \approx \mathbf{Q} \approx \mathbf{N} \times \mathbf{N}$
- $(0,1) \approx [0,1] \approx \mathbf{R}$

?

定理5.4 Cantor定理

- Cantor定理:
- (1) $N \not\approx R$
- (2) 设A为任意集合,则$A \not\approx P(A)$.

Cantor定理证明(1)

- (1) $N \not\approx R$

证明: (反证) 假设$N \approx R \approx [0,1]$, 则存在 $f:N \to [0,1]$双射, 对$\forall n \in N$, 令$f(n)=x_{n+1}$,

于是$\mathrm{ran} f = [0,1] = \{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots\}$将 x_i表示成如下小数:

Cantor定理证明(1)

$$x_1=0.a_1^{(1)}\ a_2^{(1)}\ a_3^{(1)}\ldots\ldots$$
$$x_2=0.a_1^{(2)}\ a_2^{(2)}\ a_3^{(2)}\ldots\ldots$$
$$x_3=0.a_1^{(3)}\ a_2^{(3)}\ a_3^{(3)}\ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$x_n=0.a_1^{(n)}\ a_2^{(n)}\ a_3^{(n)}\ldots\ldots$$
$$\vdots$$

其中$0\le a_j^{(i)}\le 9$, $i,j=1,2,\ldots$

选一个[0,1]中的小数

$x=0.b_1b_2b_3\ldots\ldots$ 使得

(1) $0\le b_j\le 9$, $i=1,2,\ldots$

(2) $b_n\ne a_n^{(n)}$

(3) 对x也注意表示的唯一性

由x的构造可知, $x \in [0,1]$,
$x \notin \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$
(x与x_n在第n位上不同).
这与$[0,1] = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$矛盾!

对角化方法

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \ldots\ldots & a_n^{(1)} \\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \ldots\ldots & a_n^{(2)} \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \ldots\ldots & a_n^{(3)} \\
 & \vdots & & & \\
a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \ldots\ldots & a_n^{(n)} \\
 & \vdots & & &
\end{array}
$$

Cantor定理证明(2)

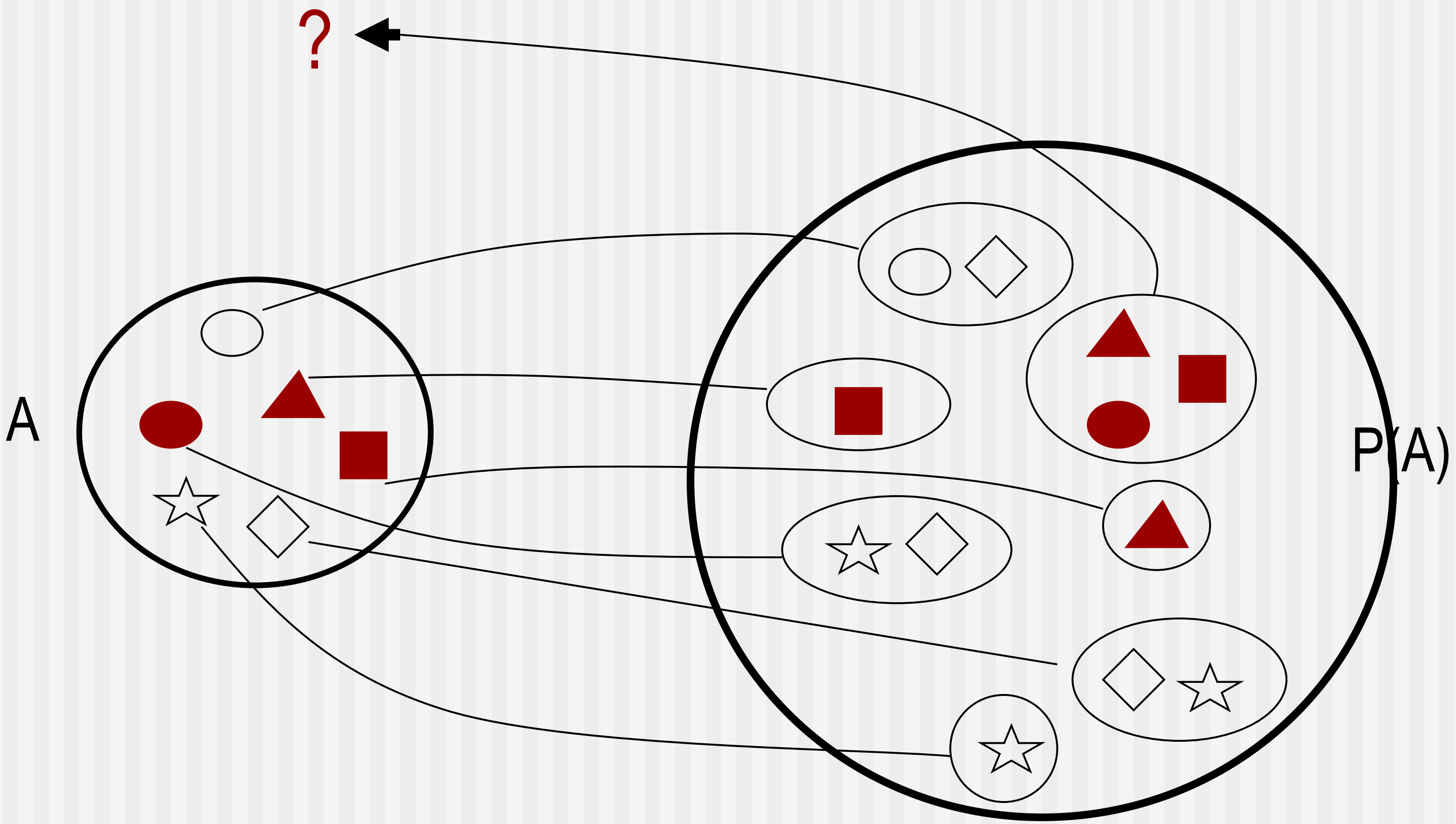
- 证明: (反证) 假设存在双射 $f:A \to P(A)$, 令

$$B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin f(x) \}$$

则$B \in P(A)$. 由f是双射, 设$f(b)=B$, 则

$$b \in B \Leftrightarrow b \notin f(b) \Leftrightarrow b \notin B,$$

矛盾! #


?
A
P(A)

有穷集合

- 有穷集合A(finite set)
- ⇔与某个自然数n等势的集合
- ⇔$A \approx n$
- 不能与自身真子集建立双射

无穷集

- 无穷集**(infinite set)**

⇔不与某个自然数**n**等势的集合

⇔能与自身真子集建立双射的集合

定理5.5

- 定理5.5 不存在与自己的真子集等势的自然数

证明：(数学归纳法) 设n为自然数，$\forall f\in(n\to n)$且f是单射的，则f一定是满射的，即ranf=n. 设

$S=\{n\in N \mid \forall f(\, f\in(n\to n) \wedge f单射\to f满射\}.$

$f:n\to n \wedge \operatorname{ran} f \subseteq n$

定理5.5证明(1)

$S=\{n\in N \mid \forall f(f\in(n\to n)\wedge f$单射$\to f$满射$\}$.

(1) $0\in S$:

$f\in(0\to 0)\Rightarrow f$是空函数$\Rightarrow f$满射.

(2) $n\in S\Rightarrow n^+\in S$: 即$f:n^+\to n^+$单射$\Rightarrow f$满射:

设$g = f\upharpoonright n: n\to n^+$, 分两种情形:

(a) 假设n 在f 下封闭. 则$g:n\to n$单射, 由归纳假设, ran $g=n$.由于f是单射, 必有$f(n)=n$. 于是, $\mathrm{ran}\, f = \mathrm{ran}\, g \cup\{n\} = n \cup\{n\} = n^+$.

定理5.5证明(2)

- (b) 假设n 在f 下不封闭.

设$m\in n, f(m)=n$, 令$h:n^+\to n^+$,

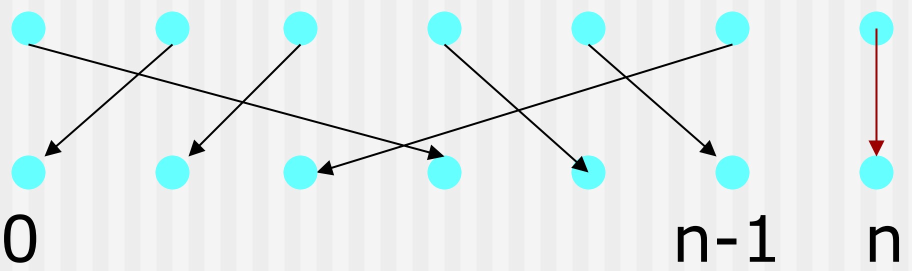
$$h(x)=\begin{cases} f(n), & x=m \\ n, & x=n \\ f(x), & x\neq m \wedge x\neq n \end{cases}$$

则n在h下封闭, 化为(a)情况.

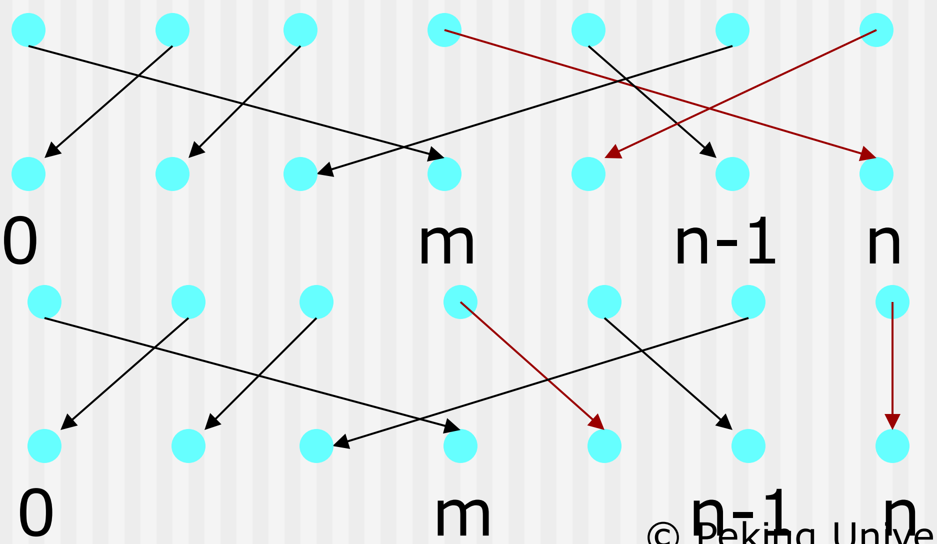
$\mathrm{ran}f = \mathrm{ran}h = n^+$. $\therefore S=N$. #

定理5.5证明图示

(a) $\mathrm{ran}\, f = \mathrm{ran}\, f \upharpoonright n \cup \{f(n)\}$



(b) $\mathrm{ran}\, f = f(n-\{m\}) \cup \{f(m)\} \cup \{f(n)\}$



推论1

- 不存在与自己的真子集等势的有穷集

证明: (反证法) 假设存在有穷集$A \supset B$和$f: A \to B$双射, 自然数n和A等势,则$g: A \to n$双射.

令$h=(g \upharpoonright B) \circ f \circ g^{-1}: n \to g(B)$, h双射, 但是$g(B) \subset n$(若$g(B)=n$, 则g不是单射), 与定理5.5矛盾! #

推论2

- (1)任何与自己的真子集等势的集合都是无穷集

反证法：如果存在和自己真子集等势的集合不是无穷集，则与某个自然数n等势，为有穷集合，与推论1矛盾。

- (2)N是无穷集

由$N \approx N_{偶} \approx N_{奇}$得证

推论3

- 任何有穷集合都与唯一的自然数等势

证明:如果有穷集$A\approx n$, $A\approx m$, $m,n\in N$.则$n\approx m$.又由N上三歧性可知, $m\in n, m=n, n\in m$中仅有一个成立. 但是$m\in n\Rightarrow m\subset n$, 与定理5.5矛盾, $n\in m$与之类似, 故只有$m=n$成立. #

引理

- 设c为自然数n的真子集，则c与某个属于n的自然数等势

$$c \subset n \in N \Rightarrow \exists m (c \approx m \in n). \qquad \#$$

提示:数学归纳法

定理5.6

- 任何有穷集合的子集仍为有穷集合

证明：设有穷集$A\supseteq B$．若$A=B$，结论显然成立．设$B\subset A$，则$\exists!n\in N$使$A\approx n$．故$\exists f:A\to n$双射．因为$f\upharpoonright B:B\to f(B)$双射，$B\approx f(B)\subset n$．由引理，$\exists m\in n$，$B\approx m\in N$，B是有穷集．#

基数的概念

cardA称为集合A的基数，并作以下5条规定：

- (1) card A=card B $\Leftrightarrow A\approx B$
- (2) 对有穷集A, card A=n$\Leftrightarrow A\approx n$
- (3) 对自然数集N, card N=$\aleph_0$($\aleph$读阿列夫)
- (4) 对实数集R, card R=$\aleph_1=\aleph$
- (5) 0,1,2,…,$\aleph_0$,$\aleph$都称作基数.

- 0,1,2,…称作有穷基数
- $\aleph_0$,$\aleph$称作无穷基数
- 用希腊字母κ,λ,μ等表示任意基数
- card A是对|A|的推广

- 例：A={a,b,c},B={{a},{b},{c}}

cardA=cardB=3;

card $N_{偶}$=card $N_{奇}$= card N= $\aleph_0$

Card R=card [0,1]=card(0,1)= $\aleph$

- 设κ是任意基数,
  令K_κ= {x | x是集合且card x=κ}

- 当κ=0时, $K_\kappa=\{\emptyset\}$是集合
- 当κ≠0时, K_κ为基数为κ的集合的类，而不是集合

优势、劣势

- 优势,劣势:

  $A \le \bullet B \Leftrightarrow \exists$单射 $f: A \to B$

  $\Leftrightarrow$ B比A优势 $\Leftrightarrow$ A比B劣势

绝对优势、绝对劣势

- 绝对优势,绝对劣势:

$$A \lessdot B \Leftrightarrow A \lessdot B \wedge A \not\approx B$$

$$\Leftrightarrow \text{B比A绝对优势} \Leftrightarrow \text{A比B绝对劣势}$$

定理5.7

- 设A,B为二集合，则A$\preccurlyeq\cdot$B 当且仅当存在C$\subseteq$B，使得A$\approx$C

  即：A$\preccurlyeq\cdot$B $\Leftrightarrow\exists$C$\subseteq$B，使得A$\approx$C

定理5.7证明

- $A \preccurlyeq\cdot B \Leftrightarrow \exists C \subseteq B$, 使得$A \approx C$

证明: ($\Rightarrow$)

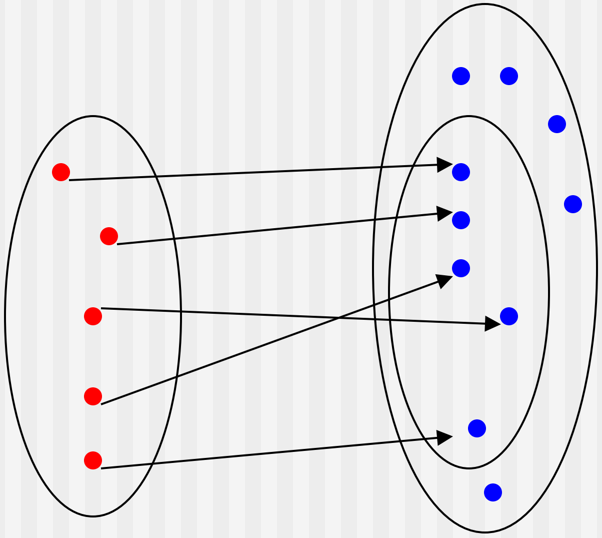
$A \preccurlyeq\cdot B$

$\Rightarrow \exists f: A \to B$ 单射

$\Rightarrow \exists f: A \to \mathrm{ran} f$ 双射

$\Rightarrow A \approx \mathrm{ran}\ f \subseteq B$

$\Rightarrow$取$C = \mathrm{ran}\ f$即可.



定理5.7证明(续)

- $A \preccurlyeq\cdot B \Leftrightarrow \exists C \subseteq B$, 使得$A \approx C$

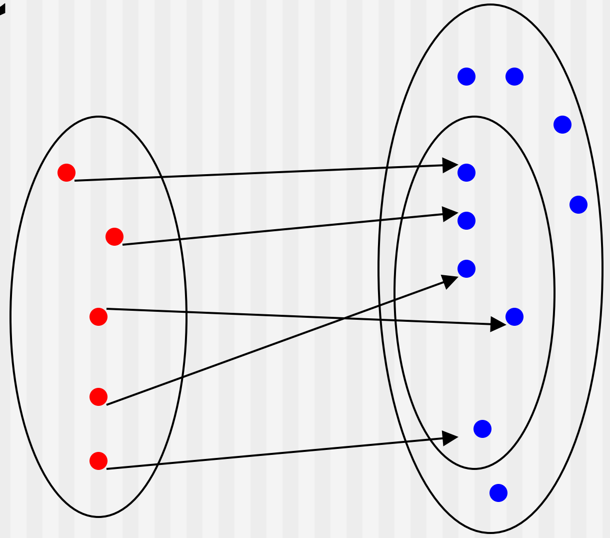
证明: ($\Leftarrow$)

$\exists C \subseteq B$, 使得$A \approx C$

$\Rightarrow \exists g: A \to C$ 双射

$\Rightarrow \exists g: A \to B$ 单射

$\Rightarrow A \preccurlyeq\cdot B$. #



推论

A,B为二个集合

- (1) $A \subseteq B \Rightarrow A \preccurlyeq\!\cdot B$
- (2) $A \approx B \Rightarrow A \preccurlyeq\!\cdot B \wedge B \preccurlyeq\!\cdot A$ #

定理5.8

设A,B,C为三个集合

(1) $A \preccurlyeq\cdot A$

由推论(1) $A \subseteq A$可证

(2) $A \preccurlyeq\cdot B \wedge B \preccurlyeq\cdot C \Rightarrow A \preccurlyeq\cdot C$

函数$f:A\to B$,$g:B\to C$为单射，则$g\circ f:A\to C$为单射 #

定理5.9

设A,B,C,D为4个集合，已知A≼·B且C≼·D，则

- (1)$A\cup C \preccurlyeq\cdot B\cup D$ $(B\cap D=\emptyset)$
- (2) $A\times C \preccurlyeq\cdot B\times D$

定理5.9证明

(1) $A \preccurlyeq\cdot B \wedge C \preccurlyeq\cdot D \wedge B \cap D = \emptyset \Rightarrow A \cup C \preccurlyeq\cdot B \cup D$

证明: $A \preccurlyeq\cdot B \wedge C \preccurlyeq\cdot D \wedge B \cap D = \emptyset$

$\Rightarrow \exists f{:}A \to B$ 单射, $g{:}C \to D$ 单射

$\Rightarrow \exists h{:}\ A \cup C \to B \cup D$ 单射,且

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in C-A \end{cases}$$

$\Rightarrow A \cup C \preccurlyeq\cdot B \cup D$

定理5.9证明(续)

- (2) $A \preccurlyeq\cdot B \wedge C \preccurlyeq\cdot D \Rightarrow A \times C \preccurlyeq\cdot B \times D$

证明: $A \preccurlyeq\cdot B \wedge C \preccurlyeq\cdot D$

$\Rightarrow \exists f{:}A \to B$ 单射, $g{:}C \to D$ 单射

$\Rightarrow \exists H$: $A \times C \preccurlyeq\cdot B \times D$ 单射

$H(\langle x,y \rangle) = \langle f(x),g(y) \rangle$

$\Rightarrow A \times C \preccurlyeq\cdot B \times D$. #

定理5.10

已知card A=card B=κ,

并且card C=card D=λ则

$$A \leqslant\cdot C \leftrightarrow B \leqslant\cdot D$$

定理5.10证明

- $\text{card } A=\text{card } B=\kappa \wedge \text{card } C=\text{card } D=\lambda \Rightarrow A\preccurlyeq\cdot C \leftrightarrow B\preccurlyeq\cdot D$

证明: $(\rightarrow)$

$\text{card } A=\text{card } B \Rightarrow \exists f:A\rightarrow B$ 双射

$\text{card } C=\text{card } D \Rightarrow \exists g:C\rightarrow D$ 双射

$A\preccurlyeq\cdot C \Rightarrow \exists h:A\rightarrow C$ 单射

则 $\exists j=(g\circ h)\circ f^{-1}: B\rightarrow D$ 单射

$\Rightarrow B\preccurlyeq\cdot D$.

$(\leftarrow)$ 类似证明. #

基数的比较

- 定义5.4
- 设card $A=\kappa$, card $B=\lambda$
- $\kappa \leq \lambda \Leftrightarrow A \preccurlyeq\cdot B$
- $\kappa < \lambda \Leftrightarrow A \prec\cdot B$

例5.2

- $\kappa \le \lambda \Rightarrow \exists A \subseteq B$, card $A=\kappa \wedge$ card $B=\lambda$

证明: $\kappa \le \lambda$

$\Rightarrow \exists$集合K,L 使得card $K=\kappa \wedge$ card $L=\lambda$

$\Rightarrow K \preccurlyeq\cdot L$

$\Rightarrow \exists f:K \to L$ 单射

$\Rightarrow \exists f:K \to \mathrm{ran} f$ 双射

$\Rightarrow K \approx \mathrm{ran}\, f \subseteq L$

$\Rightarrow$取$A=\mathrm{ran} f$, $B=L$即可. #

例5.3

(1) $0 \leq \kappa$ (2) $n < \aleph_0$

证明:

(1) 设card $A=\kappa$, $\emptyset$: $\emptyset \to A$单射$\Rightarrow \emptyset \preccurlyeq\!\cdot A \Rightarrow 0=\text{card}\ \emptyset \leq \text{card}\ A=\kappa$.

(2) $n \subset N \wedge n \not\approx N \Rightarrow n \prec\!\cdot N \Rightarrow n=\text{card}\ n < \text{card}\ N=\aleph_0$. #

例5.4

- **m $\underline{\in}$ n ⇔ m≤n.**

证明:

m $\underline{\in}$ n ⇔ m $\subseteq$ n ⇔ m $\preccurlyeq\cdot$ n ⇔ m≤n

#

定理5.11

- 证明：card A < card P(A)

证明：取$f:A \to P(A)$, $f(x)=\{x\}$,

f单射 $\Rightarrow A \preccurlyeq\cdot P(A)$

由康托定理可知$A \not\approx P(A)$

所以,

$A \prec\cdot P(A) \Rightarrow$ card A < card P(A). #

例5.5

- (1) $\lambda \leqslant \lambda$
- (2) $\kappa \leqslant \lambda \wedge \lambda \leqslant \mu \Rightarrow \kappa \leqslant \mu$ #

定理5.12

- Schröder-Bernstein定理:

  (1) $A \leq\!\bullet B \wedge B \leq\!\bullet A \Rightarrow A \approx B$

  (2) $\kappa \leq \lambda \wedge \lambda \leq \kappa \Rightarrow \kappa = \lambda$

定理5.12(1)证明

- (1) $A \preccurlyeq\cdot B \wedge B \preccurlyeq\cdot A \Rightarrow A \approx B$

证明: $A \preccurlyeq\cdot B \wedge B \preccurlyeq\cdot A$

$\Rightarrow \exists f{:}A \to B$ 单射, $g{:}B \to A$ 单射.

若ran $f=B$ 或ran $g=A$, 则f或g是A和B之间的双射, 则有$A \approx B$.

若A-ran $g=\emptyset$,则g是B到A的双射, $A \approx B$.

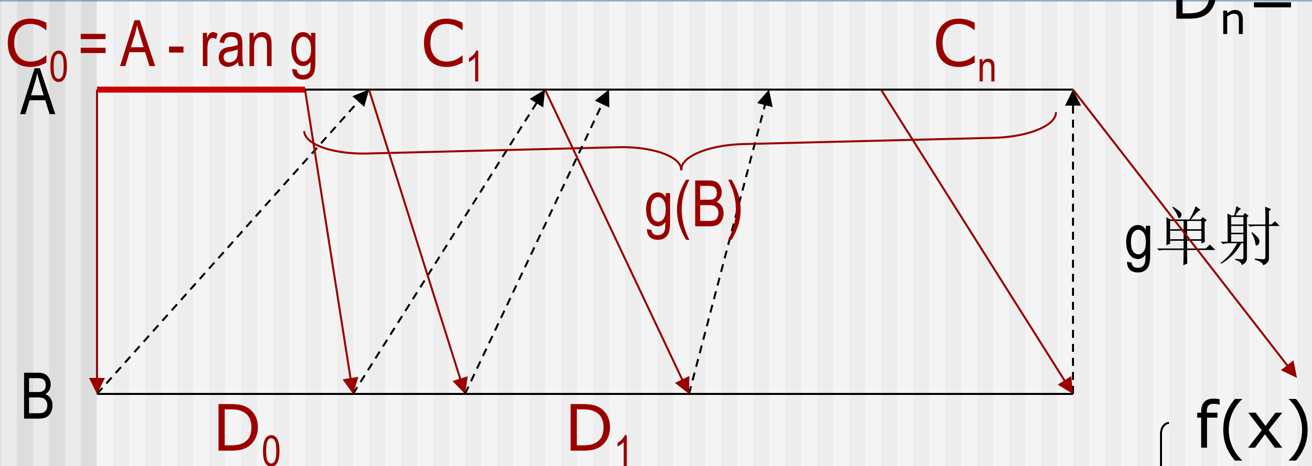
设A-ran $g \neq \emptyset$且B-ran $f \neq \emptyset$.

证明(续)

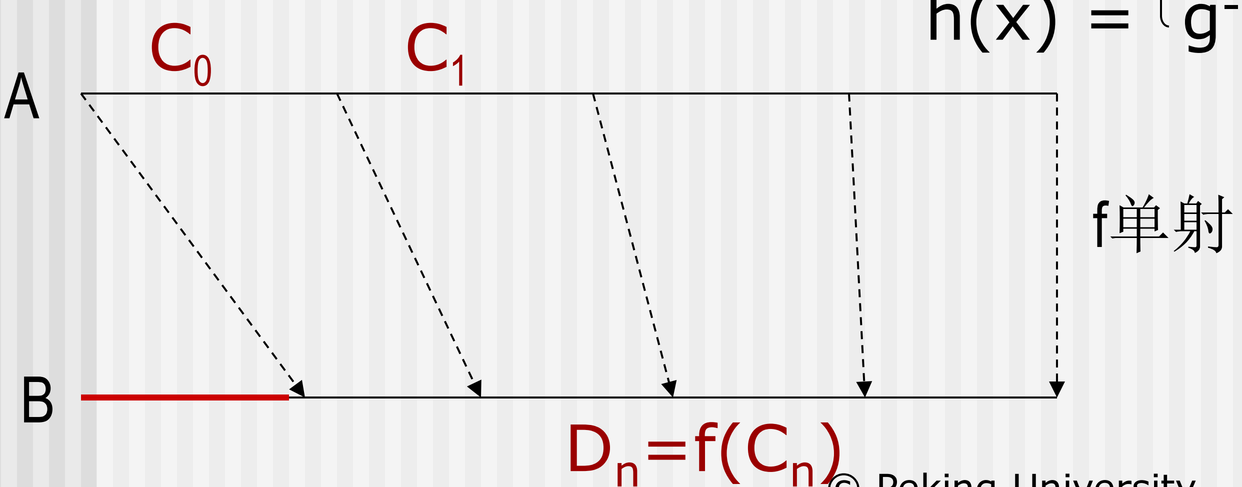
$g: B \to g(B)$为双射

$C_{n+1}=g(D_n)$

$D_n= f(C_n)$,



$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \exists n(n\in N \wedge x\in C_n) \\ g^{-1}(x), & \text{否则} \end{cases}$$



定理5.12(1)证明

- 令C_0 = A-ran g ≠∅,

  $C_{n+1}=g(D_n)$,

  $D_n= f(C_n)$, n∈N.

取h: A→B，且

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \exists n(x\in N \land x\in C_n) \\ g^{-1}(x), & 否则 \end{cases}$$

需要证明h是双射的

定理5.12(1)证明

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \exists n(x \in N \wedge x \in C_n) \\ g^{-1}(x), & 否则 \end{cases}$$

(1)证明h是单射的

$\forall x_1, x_2 \in A$,且$x_1 \neq x_2$

若$\exists m,n$,使得$x_1 \in C_m$, $x_2 \in C_n$,由于f的单射性可知

$h(x_1)=f(x_1) \neq f(x_2)=h(x_2)$.

若$\forall n \in N$, $x_1 \notin C_n$且$x_2 \notin C_n$,则$x_1,x_2 \in \mathrm{ran}\ g$,由g的单射性可知

$h(x_1)=g^{-1}(x_1) \neq g^{-1}(x_2)=h(x_2)$

若$\exists n, x_1 \in C_n$且$x_2 \notin C_m$,这时$h(x_1)=f(x_1) \in D_n$,而

$h(x_2)=g^{-1}(x_2) \notin D_n$ 所以$h(x_1) \neq h(x_2)$

所以h是单射的

定理5.12(1)证明

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & \exists n(x\in N \land x\in C_n) \\ g^{-1}(x), & \text{否则} \end{cases}$$

(2)证明h是满射的，ranh $\subseteq$B,需要证B$\subseteq$ranh

$B=(\cup\{D_n|n\in N\})\cup(B-(\cup\{D_n|n\in N\}))$,

只需证明$\cup\{D_n|n\in N\})\subseteq ranh$, $(B-(\cup\{D_n|n\in N\})\subseteq ranh$,

因为$D_n=f(C_n)=h(C_n)$,所以$\cup\{D_n|n\in N\})\subseteq ran\ h$

又因为$\forall y\in(B-(\cup\{D_n|n\in N\})$,所以$g(y)\notin C_n(n\in N)$,于是 $h(g(y))=g^{-1}(g(y))=y$,这说明

$(B-(\cup\{D_n|n\in N\})\subseteq ran\ h$

所以h是满射的 #

定理5.12

- Schröder-Bernstein定理:

(1) $A \leq\!\bullet B \wedge B \leq\!\bullet A \Rightarrow A \approx B$

$\Downarrow$

(2) $\kappa \leq \lambda \wedge \lambda \leq \kappa \Rightarrow \kappa = \lambda$

例5.6

- $A \subseteq B \subseteq C \wedge A \approx C \Rightarrow A \approx B \approx C$

证明: $A \subseteq B \subseteq C \wedge A \approx C$

$\Rightarrow A \preccurlyeq \cdot B \wedge B \preccurlyeq \cdot A \Rightarrow A \approx B \Rightarrow A \approx B \approx C$

定理5.13

- $R \approx (N\to 2)$,其中$(N\to 2) = 2^N$

证明:

(1) $H: (0,1)\to(N\to 2)$ 单射,

$\forall z\in(0,1)$的二进制小数, $H(z):N\to\{0,1\}$,

$H(z)(n)=z$的二进制表示的第$n+1$位小数.

(2) $G: (N\to 2)\to[0,1]$ 单射, $\forall f:N\to 2$,
$G(f)=0.f(0)f(1)f(2)\ \ldots$(第$n+1$位小数是$f(n)$). #

举例

(1) z=0.101110011..时

- H(z)(0)=1; H(z)(1)=0; H(z)(2)=1; H(z)(3)=1; H(z)(4)=1; …

(2) 特征函数 f(0)=1, f(1)=0, f(2)=1, f(3)=0,…

可以得到十进制小数f=0.1010… $\in$[0, 1/9]

- 可数集(可列集): card A $\leq \aleph_0$.
  - 有穷可数集: n, ($\forall n \in N$)
  - 无穷可数集: N

- 定理5.15: A是无穷可数集$\Leftrightarrow A=\{a_1,a_2,\ldots\}$
- 定理5.18: A是无穷集$\Rightarrow$P(A)不是可数集

定理5.16

- 可数集的子集是可数集

证明：设A为任意可数集，B $\subseteq$A,

B $\preccurlyeq\cdot$ A $\preccurlyeq\cdot$ N,

于是card B $\leq$ card A $\leq$card N

所以cardB $\leq \aleph_0$

B为可数集 #

定理5.19

设K_1, K_2, L_1, L_2 为集合, $K_1 \approx K_2$, $L_1 \approx L_2$, 则

- (1) 若$K_1 \cap L_1 = K_2 \cap L_2 = \emptyset$, 则 $K_1 \cup L_1 \approx K_2 \cup L_2$
- (2) $K_1 \times L_1 \approx K_2 \times L_2$
- (3) $K_1 \to L_1 \approx K_2 \to L_2$. #

基数运算

- 设 κ，λ 为基数，K, L为集合，card K = κ, card L = λ，规定
- (1) $\kappa+\lambda$ = card(K∪L)，其中K∩L=∅
- (2) $\kappa\times\lambda$ = $\kappa\bullet\lambda$ = $\kappa\lambda$ =card(K ×L)
- (3) κ^{λ} = card(L→K)

定理5.20

定理5.20: (1) $2^{\mathrm{card}A}=\mathrm{card}\ P(A)$

- (2) $\kappa < 2^{\kappa}$.   #

- 推论: (1) $\mathrm{card}\ P(N) = 2^{\aleph_0}$
- (2) $\mathrm{card}\ P(R) = 2^{\aleph}$
- (3) $\aleph = 2^{\aleph_0}$. #

基数运算性质

定理5.21:设κ,λ,μ为基数

- (1) $\kappa+\lambda = \lambda+\kappa$
- (2) $(\kappa+\lambda)+\mu = \lambda+(\kappa+\mu)$
- (3) $\kappa\cdot(\lambda+\mu) = (\kappa\cdot\lambda)+(\kappa\cdot\mu)$
- (4) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda}\cdot\kappa^{\mu}$
- (5) $(\kappa\cdot\lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu}\cdot\lambda^{\mu}$
- (6) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$. #

- 定理5.22:设$\kappa \le \lambda$, μ为基数
- (1) $\kappa + \mu \le \lambda + \mu$
- (2) $\kappa \cdot \mu \le \lambda \cdot \mu$
- (3) $\kappa^{\mu} \le \lambda^{\mu}$
- (4) $\mu^{\kappa} \le \mu^{\lambda}$, 其中$\kappa$,$\mu$不同时为0. #

- 定理5.23:设κ为无穷基数,则$\kappa\cdot\kappa = \kappa$. #
- 定理5.24:设κ为无穷基数, λ为基数,则$\kappa+\lambda = \kappa\cdot\lambda = \max\{\kappa,\lambda\}$, (其中$\lambda\neq 0$) #
- 推论: $\kappa+\kappa = \kappa\cdot\kappa = \kappa$.
- •定理5.25:设κ为无穷基数,则$\kappa^{\kappa} = 2^{\kappa}$. #

小结

- 等势
  - 构造双射函数技巧
  - Cantor定理
- 有穷集合和无穷集合
- 基数：1,2,…,n, $\aleph_0$,$2^{\aleph_0}$=$\aleph$
- 优势 劣势
  - 构造单射函数
  - Schroder-Bernstein定理
  - 基数比较
  - 基数运算(无穷基数)
    - $\kappa^\kappa = 2^\kappa$. (κ为无穷基数)
    - $\kappa+\kappa = \kappa\bullet\kappa = \kappa$. (κ为无穷基数)

作业

- P93: 2,5,11,12