第4章 自然数

- 自然数的定义
- 传递集合
- 自然数的运算
- *N上的序关系

封闭

- 封闭: 设f是函数, $A\subseteq \mathrm{dom}f$, 若

$$\forall x(\ x\in A \rightarrow f(x)\in A\ )$$

则称A在f下是封闭的(closed)

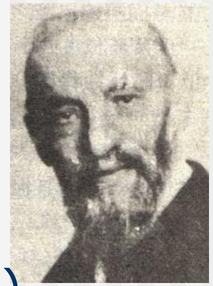
- 等价条件: $f(A)\subseteq A$
- 例: $f:N\rightarrow N$, $f(x)=x+1$,

$A=\{0,2,4,6,\ldots\}$在f下不是封闭的

$B=\{2,3,4,\ldots\}$在f下是封闭的

Peano系统

意大利数学家、
逻辑学家
(1858~1932)



- Peano系统: $<M,F,e>$, $F:M\to M$

(1) $e\in M$

(2) M在F下封闭

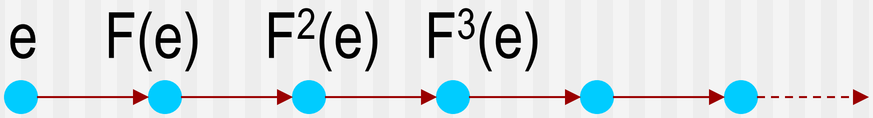
(3) $e\notin \mathrm{ran}F$

(4) F是单射的

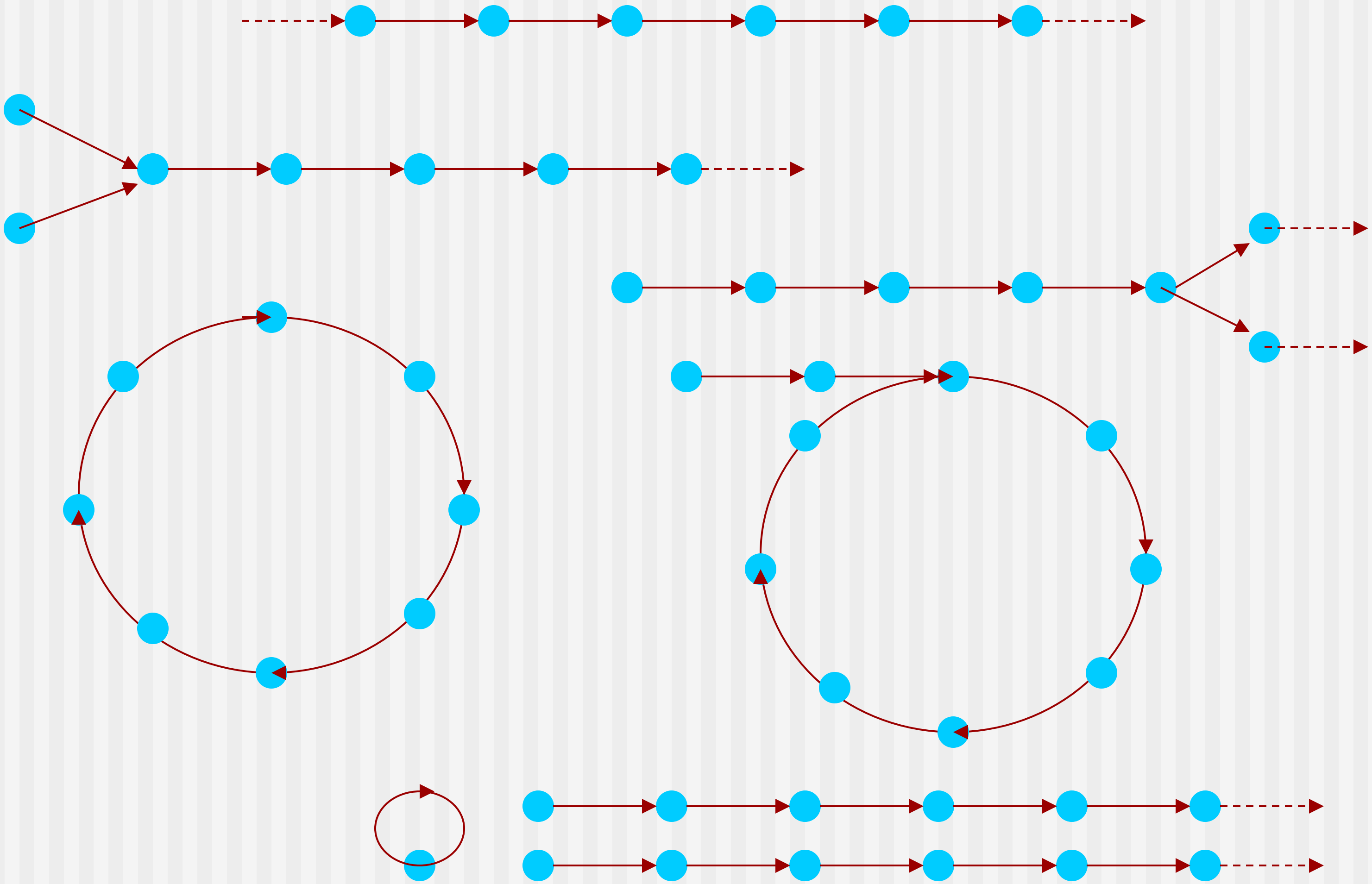
(5) (极小性公设)

$$A\subseteq M \wedge e\in A \wedge A\text{在}F\text{下封闭} \Rightarrow A=M$$

$$F^r(e)=\overbrace{FF\ldots F}^{r}(e)$$

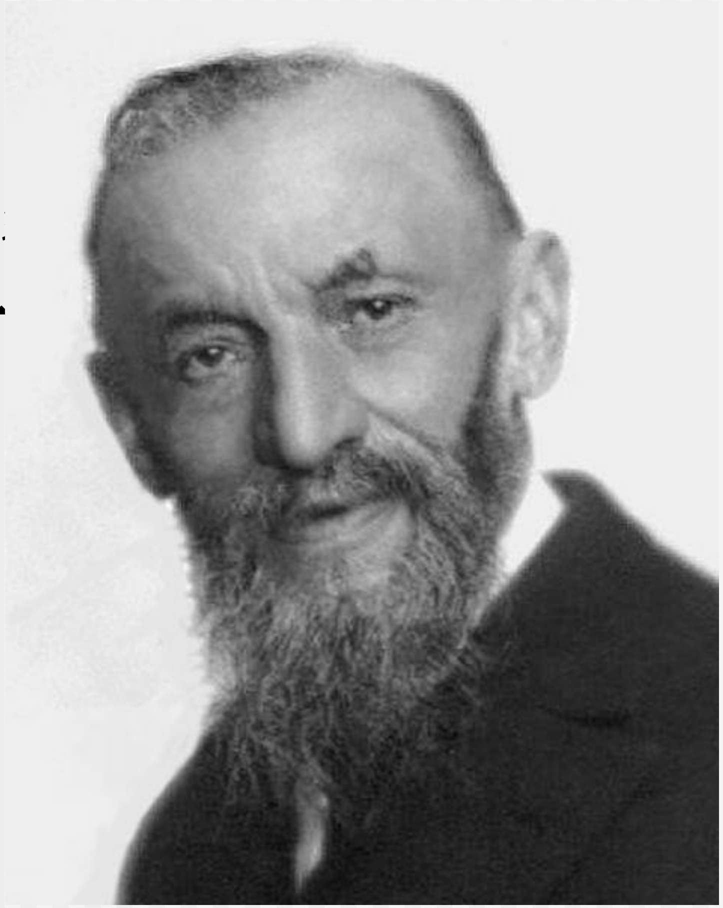


为何如此定义?



Giuseppe Peano

- **Giuseppe Peano**
  - **1858-1932,** 意大利数学
  - 数理逻辑集合论奠基人之一
    - 引入∈和⊂记号
      (他最初用的是ε和⊃)
    - 皮亚诺公理 (最初是9条)
  - 皮亚诺曲线
    - 一条充满平面的连续曲线



如何实现?

- 如何利用集合来构造Peano系统?
- 借助于下面两个概念
  - 后继
  - 归纳集

冯•诺依曼

- **John von Neumann**
  - **1903-1957**, 匈牙利裔美国科学家
    - 数学(以集合论为例)
      - 基础公理,类(1925博士论文)
      - 后继,归纳集(自然数构造)
    - 量子力学 (奠基人之一)
    - 博弈论(奠基人)
    - 计算机(冯•诺依曼体系结构)

后继(successor)

- 后继(successor): 设A是集合,

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

称为A的后继.

- 性质: $A \subseteq A^+ \wedge A \in A^+$

后继(举例)

- $A=\varnothing$

  $A^{+} = \varnothing^{+} = \varnothing\cup\{\varnothing\} = \{\varnothing\}$

  $A^{++} = \{\varnothing\}^{+} = \{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

  $A^{+++} =\{\varnothing,\{\varnothing\}\}^{+}$

  $=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\cup\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

  $= \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

- $A=\{a,b\}$

$A^{+} = \{a,b\}\cup\{A\} = \{a,b,A\} = \{a,b,\{a,b\}\}$

归纳集

- 归纳集: 若集合A满足

  (1) $\varnothing \in A$

  (2) $\forall x(x \in A \rightarrow x^{+} \in A)$

则称A为归纳集.

- A是归纳集 $\Leftrightarrow$ A含有$\varnothing$且对后继封闭

归纳集(举例)

- $A=\{\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++},\ldots\}$
- $B=\{\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++},\ldots,a,a^{+},a^{++},a^{+++},\ldots\}$
- $C=\cancel{\{\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++}\}}$, 少$\varnothing$
- $D=\cancel{\{\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++},\ldots,a\}}$, 少$a^{+},a^{++},a^{+++},\ldots$

自然数

- 自然数：自然数是属于每个归纳集的集合
- 例：$\varnothing$,

$\varnothing^{+} = \{\varnothing\}$,

$\varnothing^{++} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,

$\varnothing^{+++} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,

$\varnothing^{++++} =$

$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$,

……

0,1, 2, …,n,…

- $0 = \varnothing$
- $1 = \varnothing^{+} = \{\varnothing\} = \{0\}$
- $2 = \varnothing^{++} = \{\varnothing,\{\varnothing\}\} = \{ 0,1\}$
- $3 = \varnothing^{+++} = \{ 0,1,2 \}$
- ……
- $n = \{ 0,1,2,\ldots,n-1 \}$

0,1,2,…作为集合

- $2 \cap 3 = 2 = \min(2,3)$, $2 \cup 3 = 3 = \max(2,3)$
- $3-2=\{2\}$, $2-3=0$ (-是集合运算)
- $\bigcup n = \bigcup \{ 0,1,2,\ldots,n-1 \} = n-1$
  $=\max(0,1,\ldots,n-1)$,
- $\bigcap n = \bigcap \{ 0,1,2,\ldots,n-1 \} = 0$
  $=\min(0,1,\ldots,n-1)$,
- $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \ldots \wedge 0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \subseteq \ldots$

自然数集

- 自然数集N：设D = { v | v是归纳集 }，

$$N=\cap D$$

- D 不是集合，否则导致集合论悖论！

定理4.1

- 定理4.1: N是归纳集.
- 证明: $N = \cap D = \cap\{ v \mid v$是归纳集 $\}$

  $= \{ x \mid \forall v($ v是归纳集 $\rightarrow x \in v) \}$.

(1) 因为$\varnothing$属于每一个归纳集,

所以$\varnothing \in \cap D \Rightarrow \varnothing \in N$.

定理4.1(证明续):

(2) $\forall n(n\in N \rightarrow n^+\in N)$?

利用 $n\in N \Leftrightarrow \forall v(v$是归纳集$\rightarrow n\in v)$ (N 的定义)

$\forall v(v$是归纳集 $\rightarrow \forall n(n\in v \rightarrow n^+\in v))$（归纳集定义）

推出:

$\forall n, n\in N \Rightarrow \forall v(v$是归纳集$\rightarrow n\in v)$

$\Rightarrow \forall v(v$是归纳集$\rightarrow n^+\in v) \Rightarrow n^+\in N.$

#

- N是最小的归纳集

$$\forall v(\ v\text{是归纳集}\ ) \Rightarrow N \subseteq v$$

- N = { 0, 1, 2, 3, … }
- 对比:
  - 自然数　　是　属于每个归纳集的集合
  - 自然数集是包含于每个归纳集的归纳集

后继函数

- 后继函数σ: $\sigma: N \to N$, $\forall n \in N$, $\sigma(n)=n^+$
- 例: $\sigma(0) = 0^+ = 1$,

  $\sigma(1) = 1^+ = 2 = 0^{++}$,

  $\sigma(2) = 2^+ = 3 = 1^{++} = 0^{+++}$,

  …… #

定理4.2

- 定理4.2: $<N,\sigma,0>$是Peano系统.
- 证明: (1) $\varnothing\in N$: 定理4.1.

(2)$\forall n(n\in N\to n^+\in N)$: 定理4.1.

(3) $\varnothing\notin ran\sigma$: $\sigma(n)=n^+=n\cup\{n\}\neq\varnothing$

(4) σ是单射的: 下面定理4.3

(5) $S\subseteq N\wedge\varnothing\in S\wedge\forall n\in S(n^+\in S) \Rightarrow S=N$:

$\varnothing\in S\wedge\forall n\in S(n^+\in S)\Rightarrow S$是归纳集$\Rightarrow N\subseteq S$.#

- 称(5)为数学归纳法原理.
- 证(5)时没有利用(4), 故可用(5)证(4).

数学归纳法原理

- 数学归纳法分两个步骤:

1. 令 $S = \{ n \mid n \in N \wedge P(n) \}$
2. 证明S是归纳集

   (1) $\varnothing \in S$;

   (2) $\forall n(n \in S \rightarrow n^+ \in S)$.

定理4.3

- 定理4.3:

  任何自然数的元素均为它的子集.
- 证明:
- 1.构造集合$S=\{\ n \mid n \in N \wedge \forall x(x \in n \to x \subseteq n)\ \}$.

  2. 证明S是归纳集

  ∴由数学归纳法原理知：S=N.   #

证明：任何自然数的元素均为它的子集

- 证明: 1.设$S=\{ n \mid n\in N \land \forall x(x\in n\rightarrow x\subseteq n) \}$.

  2. (1) $\varnothing\in S$: $\varnothing\in N \land \forall x(x\in\varnothing\rightarrow x\subseteq\varnothing)$

     (2) 设$n\in S$, 即$n\in N \land \forall x(x\in n\rightarrow x\subseteq n)$为真.

然后要证$n^+\in S$, 即要证

定理4.1可知 $\longrightarrow$ $n^+\in N \land \forall x(x\in n^+ \rightarrow x\subseteq n^+)$.

$\forall x$, 设$x\in n^+=n\cup\{n\}$, 分两种情况:

(a) $x=n \Rightarrow x=n\subseteq n^+$, $\longleftarrow$ $\boxed{(n^+=n\cup\{n\})}$

(b) $x\in n \Rightarrow x\subseteq n\subseteq n^+$, (归纳假设)

$\therefore$ $S=N$. #

定理4.2(4)证明

- 证明：σ是单射，即$m^+=n^+ \Rightarrow m=n$
- 证明：反证法，设$m \neq n$,则

$m^+=n^+ \Rightarrow n \in n^+=m^+=m \cup \{m\}$

$\Rightarrow n \in m \lor n=m$

$\Rightarrow n \in m$ (由于假设$m \neq n$)

$\Rightarrow n \subseteq m$ (定理4.3：任何自然数的元素都是它的子集)

$\Rightarrow n \subset m$ (由于假设$m \neq n$)

同理可证：$m \subset n$，矛盾！ #

定理4.4

- 定理4.4: $\forall m,n\in N$, $m^+\in n^+ \Leftrightarrow m\in n$.
- 证明:

  ($\Rightarrow$) 利用定理4.3(任何自然数的元素均为它的子集)

  ($\Leftarrow$) 数学归纳法. #

定理4.4证明 ($\Rightarrow$)

- $\forall m,n\in N,\ m^+\in n^+ \Rightarrow m\in n.$
- 证明:

$m^+\in n^+=n\cup\{n\}$

$\Rightarrow m^+\in n \lor m^+=n$

$\Rightarrow m^+\subseteq n$ (根据定理4.3)

$\Rightarrow m\in m^+\subseteq n$ ($m\in m^+$)

$\Rightarrow m\in n$

定理4.4证明 ($\Leftarrow$)

- $\forall m,n\in N,\ m^+\in n^+ \Leftarrow m\in n.$
- 证明:令$S=\{n|n\in N\wedge\forall m(m\in n\rightarrow m^+\in n^+)\}$

(1) $\emptyset\in S$: $\emptyset\in N\wedge\forall m(m\in\emptyset\rightarrow m^+\in\emptyset^+)$.

(2) 证明$n\in S\Rightarrow n^+\in S$,

即 $\forall m(m\in n^+\Rightarrow m^+\in n^{++})$

$m\in n^+=n\cup\{n\} \Rightarrow m\in n \vee m=n$

$\Rightarrow m^+\in n^+ \vee m^+=n^+$ (归纳假设)

$\Rightarrow m^+\in n^{++}$ $(n^+\subseteq n^{++}\wedge n^+\in n^{++})$. $\therefore S=N$. #

定理4.5:

- 定理4.5: 任何自然数都不是自己的元素.

证明:构造$S=\{ n \mid n\in N \wedge n\notin n \}$.

(1) $\emptyset\in S$: $\emptyset\in N \wedge \emptyset\notin\emptyset$.

(2) 由$n\in S$,证明$n^+\in S$

$n\notin n \Rightarrow n^+ \notin n^+$ (定理4.4:$m^+\in n^+ \Rightarrow m\in n$的逆否命题)

$\therefore S=N$. #

定理4.6

- 定理4.6: $\varnothing$属于除0外的任何自然数.
- 证明:构造$S' = \{n \mid n \in N \wedge n \neq 0 \wedge \varnothing \in n\}$, $S = \{0\} \cup S'$.

(1) 显然$\varnothing = 0 \in S$;

(2) 证明$n \in S \Rightarrow n^+ \in S$,

$n \in S \Rightarrow n = 0 \vee \varnothing \in n \Rightarrow \varnothing \in n^+ \Rightarrow n^+ \in S$ #

定理4.7(三歧性定理)

- 定理4.7(三歧性): $\forall m,n\in N$, 下面三式成立且仅成立一式.

$$m\in n,\quad m=n,\quad n\in m$$

- 证明: (1). 至多成立一式:

利用定理4.5.任何两式成立都会出现$m\in m$;

(2). 至少成立一式:

利用数学归纳法构造

$S=\{n|n\in N\wedge\forall m(m\in N\to m\in n\vee m=n\vee n\in m)\}$.#

Peano系统相似

- 相似: 设$<M_1,F_1,e_1>$, $<M_2,F_2,e_2>$是两个peano系统，若存在双射函数，满足

  (1)$h:M_1 \to M_2$,

  (2)$h(e_1)=e_2$,

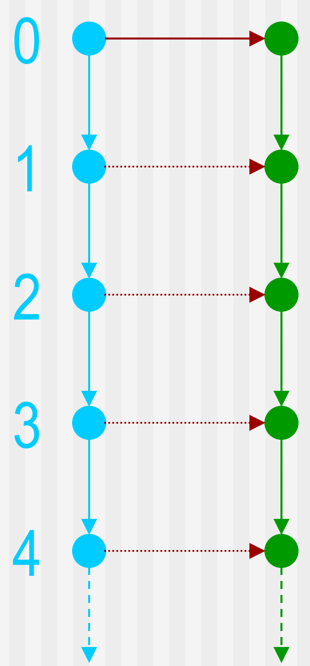
  (3)$h(F_1(x))=F_2(h(x)) \quad x \in M_1$

  则称两个系统是相似的

  记作$<M_1,F_1,e_1> \sim <M_2,F_2,e_2>$

定理4.8 (N上的递归定理)

- N上的递归定理：设A为集合，$a\in A$，$F:A\to A$，则存在唯一函数$h:N\to A$，使得$h(0)=a$，且$\forall n\in N$，$h(n^+)=F(h(n))$. #



$$a=h(0)$$
$$F(a)=F(h(0))=h(1)=h(0^+)$$
$$F^2(a)=F(F(a))=F(h(1))=h(2)=h(1^+)$$
$$F^3(a)=F(F^2(a))=F(h(2))=h(3)=h(2^+)$$
$$F^4(a)=F(F^3(a))=F(h(3))=h(4)=h(3^+)$$

4.2 传递集

- 传递集: A为传递集 $\Leftrightarrow$

  $\forall x \forall y(x \in y \wedge y \in A \to x \in A)$

A中任何元素的元素还是A的元素

定理4.10

- 定理4.10: A为传递集

  $\Leftrightarrow \bigcup A \subseteq A$

  $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \subseteq A)$

  $\Leftrightarrow A \subseteq P(A)$.   #

- 自然数及自然数集都是传递集.

定理4.10证明(1)⇒(2)

- A为传递集⇒$\cup A \subseteq A$

证明: $\forall x$, $x \in \cup A$

$\Rightarrow \exists y(x \in y \wedge y \in A)$ （$\cup$定义)

$\Rightarrow x \in A$ (A是传递集)

$\therefore \cup A \subseteq A$

定理4.10证明(2)⇒(3)

- $\cup A \subseteq A \Rightarrow \forall x(x \in A \to x \subseteq A)$

证明: $\forall x,\ x \in A$

$\Rightarrow x \subseteq \cup A$　　　(∪定义)

$\Rightarrow x \subseteq A$　　　(已知$\cup A \subseteq A$)

$\therefore \forall x(x \in A \to x \subseteq A)$

定理4.10证明(3)⇒(4)

- $\forall x(x \in A \to x \subseteq A) \Rightarrow A \subseteq P(A)$

证明: $\forall x,\ x \in A$

$\Rightarrow x \subseteq A$ (已知$x \in A \to x \subseteq A$)

$\Rightarrow x \in P(A)$ ($P(A)$定义)

$\therefore A \subseteq P(A)$

定理4.10证明(4)⇒(1)

- $A\subseteq P(A) \Rightarrow A$是传递集

证明: $\forall x,\ x\in A$

$\Rightarrow x\in P(A)$ (已知$A\subseteq P(A)$)

$\Rightarrow x\subseteq A$ ($P(A)$定义)

$\Rightarrow\forall y(y\in x\rightarrow y\in A)$

$\Rightarrow\forall y(y\in x\wedge x\in A\rightarrow y\in A)$

$\Rightarrow$ A是传递集

$\therefore$A是传递集. #

例题4.2:哪些是传递集

- **A={∅,{∅},{{∅}}}** √ ∪A={∅,**{∅}**}
- **B={0,1,2}** √ ∪B={0,1}
- **C={{a}}** × C中元素的元素a不属于C
- **D=<0,1>** D={{0},{0,1}}={1,2}

∪D={0,1}

×

定理4.11

- A为传递集⇔P(A)为传递集

证明: A为传递集

$\Leftrightarrow A \subseteq P(A)$ （定理4.10）

$\Leftrightarrow \cup P(A) \subseteq P(A)$ （$A = \cup P(A)$）

$\Leftrightarrow$ P(A)是传递集 （定理4.10）

#

定理4.12

- A为传递集$\Rightarrow \cup(A^+)=A$

证明: $\cup(A^+)$

$= \cup(A\cup\{A\})$　　　　　(A^+定义)

$= (\cup A)\cup(\cup\{A\})$

$(\cup(A\cup B)=(\cup A)\cup(\cup B))$

$= (\cup A)\cup A = A$　　　　(因为$\cup A\subseteq A$) #

定理4.13

- 每个自然数都是传递集

证明: 令$S = \{ n \mid n \in N \wedge n$是传递集$\}$

(1) $0 \in S$: 显然.

(2) 证明$\forall n \in N, n \in S \Rightarrow n^+ \in S$:

$n \in S \Rightarrow n$是传递集

$\Rightarrow \cup(n^+) = n \subseteq n^+$ (定理4.12)

$\Rightarrow n^+$是传递集 (定理4.10)

$\Rightarrow n^+ \in S$.

$\therefore S = N$ #

定理4.14

- 自然数集合N是传递集

证明:由定理4.10(3),只需证明对于任意$n\in N$有$n\subseteq N$

令$S = \{ n \mid n\in N \land n\subseteq N\}$

(1) $0\in S$: 显然.

(2) 证明$\forall n\in N$, $n\in S \Rightarrow n^+\in S$

$n\in S$

$\Rightarrow$ $n\subseteq N \Rightarrow n\cup\{n\}=n^+\subseteq N$ ($\{n\}\subseteq N$)

$\Rightarrow$ $n^+\in S$.

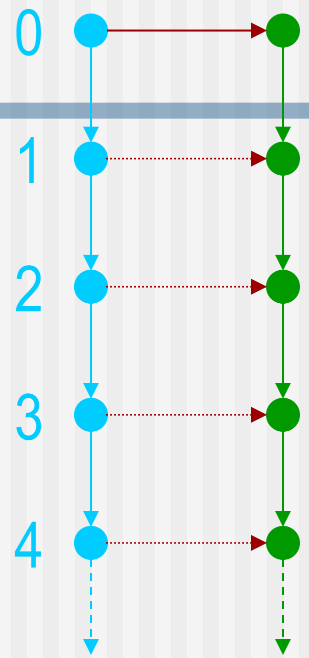
$\therefore S=N$, 即$\forall n(n\in N\rightarrow n\subseteq N)$, N是传递集. #

加法运算

- 加法:

  令$+:N\times N\rightarrow N$,对于任意的$m,n\in N$, $+(\langle m,n\rangle)=A_m(n)$记作$m+n$,称$+$为N上的加法运算。

$$+(\langle 2,3\rangle)=5,\ 5+4=9$$



$a=h(0)$

$F(a)=F(h(0))=h(1)=h(0^+)$

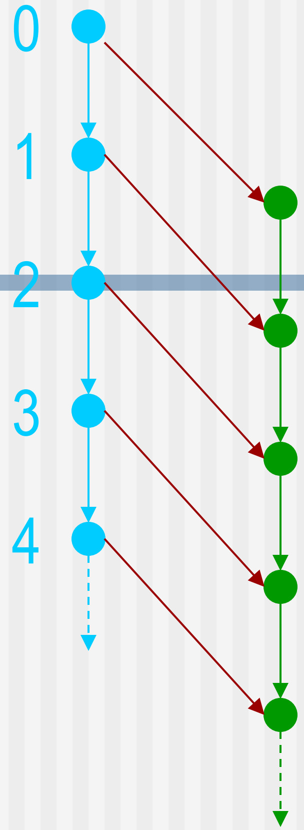
$F^2(a)=F(F(a))=F(h(1))=h(2)=h(1^+)$

$F^3(a)=F(F^2(a))=F(h(2))=h(3)=h(2^+)$

$F^4(a)=F(F^3(a))=F(h(3))=h(4) =h(3^+)$

$a\in A$, $F:A\to A$,存在唯一 $h: N\to A$

$h(0)=a$, $h(n+1)=F(h(n))$, $\forall n\in N$



$m=A_m(0)$

$\sigma(m)=\sigma(A_m(0))=A_m(1)=A_m(0^+)$

$\sigma^2(m)=\sigma(\sigma(m))=\sigma(A_m(1))=A_m(2)=A_m(1^+)$

$\sigma^3(m)=\sigma(\sigma^2(m))=\sigma(A_m(2))=A_m(3)=A_m(2^+)$

$\sigma^4(a)=\sigma(\sigma^3(a))=\sigma(A_m(3))=A_m(4)=A_m(3^+)$

$m \in A=N-\{0,1,\ldots,m-1\}$, $\sigma: A \to A$, $A_m: N \to A$,

$A_m(0)=m$, $A_m(n^+)=\sigma(A_m(n))=(A_m(n))^+$

一元函数加法：“加m”

- “加m”：m固定， $A_m: N \to N$,

$$\begin{cases} A_m(0)=m, & \text{加法规则1} \\ A_m(n^+)=(A_m(n))^+. & \text{加法规则2} \end{cases}$$

- 例：$A_2(3)=A_2(2^+)=A_2(2)^+=A_2(1^+)^+$
$=A_2(1)^{++}=A_2(0^+)^{++}=A_2(0)^{+++}=2^{+++}$
$=3^{++}=4^+=5.$

- $A_m = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}$:

二元函数加法

- 加法: $+:N\times N\to N,\ m+n=A_m(n)$
- 例: $3+3 = A_3(3)$

  $= A_3(2^+) = A_3(2)^+$

  $= A_3(1^+)^+ = A_3(1)^{++}$

  $= A_3(0^+)^{++} = A_3(0)^{+++}$

  $= 3^{+++} = 4^{++} = 5^+ = 6.$ #
- 递归定理保证如此定义是有意义的

定理4.15

- $\forall m,n \in N$, $m+0=m$,

$$m+n^{+} = (m+n)^{+}$$

- 证明:(1)由A_m和加法运算的定义

$m+0=A_m(0)=m$. #

(2) $m+n^{+} = A_m(n^{+})$ (+定义)

$= (A_m(n))^{+}$ (A_m定义)

$= (m+n)^{+}$ (+定义). #

- 证明

  $\forall m,n\in N,\ 0+n=n,$

  $$m^{+}+n = (m+n)^{+}$$

- 用数学归纳法

$\forall m,n \in N,\ \ m^+ + n = (m+n)^+$

- 证明: (数学归纳法). 对任意$m \in N$,

令 $S = \{ n \mid n \in N \wedge m^+ + n = (m+n)^+ \}$.

(1) $0 \in S$: $m^+ + 0 = m^+ = (m+0)^+$.

(2) $\forall n (n \in S \to n^+ \in S)$: 设$n \in S$,下证$n^+ \in S$.

$m^+ + n^+ = A_{m^+}(n^+) = A_{m^+}(n)^+$ (+与A_m定义)

$= (m^+ + n)^+ = (m+n)^{++}$ (归纳假设)

$= (m+n^+)^+$ (定理: $m+n^+ = (m+n)^+$)

$\therefore S = N.$ #

加法交换律

- 加法交换律: $\forall m,n\in N,\ m+n=n+m.$
- 证明: 对任意$m\in N$,

  令$S=\{\ n \mid n\in N \wedge m+n=n+m\ \}.$

(1) $0\in S$: $m+0=m=0+m.$ (已经证明)

(2) $\forall n(n\in S\rightarrow n^+\in S)$: 设$n\in S$,下证$n^+\in S$.

$m+n^+=A_m(n^+)=A_m(n)^+=(m+n)^+$

$=(n+m)^+$ (归纳假设)

$=n^++m$ (性质: $m^++n=(m+n)^+$)

$\therefore S=N.$ #

加法性质

- 加法单位元0: 0+n=n+0=n
- 交换律: n+m = m+n
- 结合律: (m+n)+k = m+(n+k)

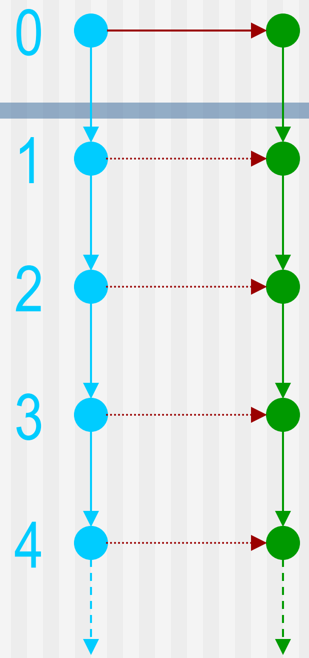
乘法运算

- 乘法:

  令$\bullet$:$N\times N\rightarrow N$,对于任意的$m,n\in N$,

  $\bullet(<m,n>)=M_m(n)$记作$m\bullet n$,称$\bullet$为N上的乘法运算。

  $$\bullet(<2,3>)=6,\ 2\bullet 3=6$$



$0 = M_m(0)$

$F(m) = M_m(0)+m = M_m(1) = M_m(0^+)$

$F^2(m) = F(F(m)) = M_m(1)+m = M_m(2) = M_m(1^+)$

$F^3(m) = F(F^2(m)) = F(M_m(2)) = M_m(3) = M_m(2^+)$

$F^4(m) = F(F^3(m)) = F(M_m(3)) = M_m(4) = M_m(3^+)$

$F: N \to N,\ M_m: N \to N,$

$M_m(0)=0$ 乘法规则1

$M_m(n^+)= M_m(n)+m$ 乘法规则2

乘法

- “乘m”: m固定， $M_m:N\to N$,

$$\begin{cases} M_m(0) = 0, \\ M_m(n^+) = M_m(n)+m. \end{cases}$$

- 例: $M_2(3)=M_2(2^+)=M_2(2)+2=M_2(1^+)+2$
$= M_2(1)+2+2=M_2(0)+2+2+2=0+2+2+2=6.$
- 乘法: $\bullet:N\times N\to N$, $m\bullet n=M_m(n)$
- 例: $3\bullet 2=M_3(2)=M_3(1)+3=M_3(0)+3+3$
$=0+3+3=3^{+++}=6.$ #

乘法性质

- 1是乘法单位元: $1 \bullet n = n \bullet 1 = n$
- 交换律: $n \bullet m = m \bullet n$
- 结合律: $(m \bullet n) \bullet k = m \bullet (n \bullet k)$
- 分配律: $m \bullet (n+k) = (m \bullet n) + (m \bullet k)$

自然数的序

- “属于等于”： $m \underline{\in} n \Leftrightarrow m \in n \vee m = n$
- “小于等于”： $m \leq n \Leftrightarrow m < n \vee m = n$
- $m < n \Leftrightarrow m \in n$
- $m > n \Leftrightarrow n \in m$
- $m \leq n \Leftrightarrow m \underline{\in} n$
- $m \geq n \Leftrightarrow n \underline{\in} m$

小结

- **1.** 自然数的定义
  - **Peano**系统
  - 后继, 归纳集
  - 自然数, 自然数集
  - 数学归纳法原理
- **2.** 传递集
- **3.** 自然数的运算
  - 加法
  - 乘法

作业

- P80: 2,3,5,7