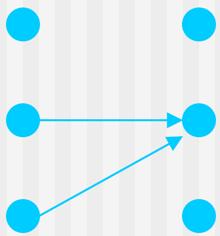
第3章 函数

- 函数的基本概念
- 函数的性质
- 函数的合成
- 反函数

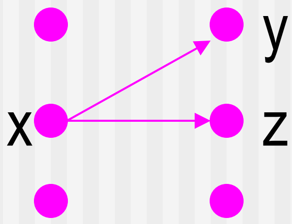
函数(function)

- 单值的二元关系称为函数或映射
- 单值: $\forall x \in \mathrm{dom}F,\ \forall y,z \in \mathrm{ran}F,$

$$xFy \wedge xFz \rightarrow y=z$$



单值



非单值

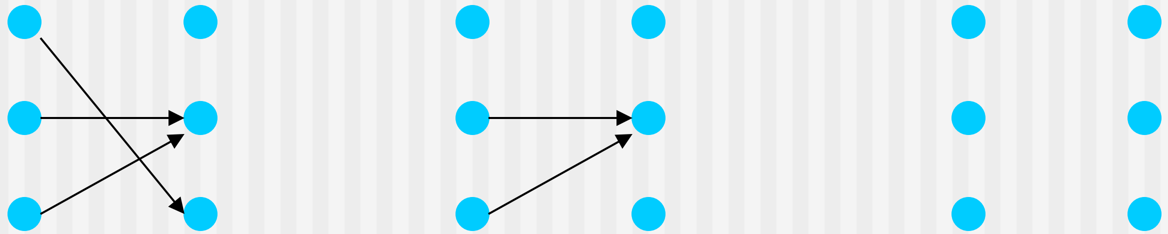
- $\varnothing$是空函数
- 常用F,G,H,…,f,g,h,…表示函数.
- $F(x)=y \Leftrightarrow <x,y>\in F \Leftrightarrow xFy$

偏函数(partial function)

- A到B的偏函数F: $\mathrm{dom}F \subseteq A \land \mathrm{ran}F \subseteq B$
- 偏函数记作 $F:A \nrightarrow B$, 称A为F的前域,
- A到B的全体偏函数记为$A \nrightarrow B$

$$A \nrightarrow B = \{ F \mid F:A \nrightarrow B \}$$

$$A \nrightarrow B \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$



例1

- 例1: 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$, 求$A \to B$.
- 解: $|A|=2,|B|=2,|A\times B|=4,|P(A\times B)|=2^4=16$.

$f_0=\varnothing$, $f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$,

$f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

$f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

$f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$,$f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

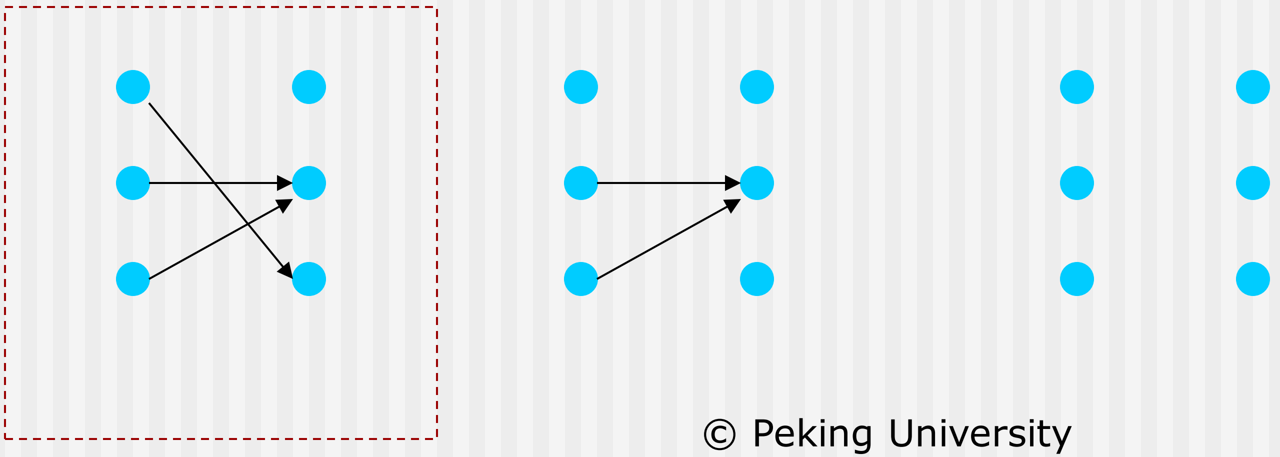
$A \to B = \{f_0 ,f_1 ,f_2 ,f_3 ,f_4 ,f_5,f_6 ,f_7 ,f_8\}$. #

- 非函数: $\{<a,1>,<a,2>\}$, $\{<b,1>,<b,2>\}$,
  $\{<a,1>,<a,2>,<b,1>\}$,…

全函数(total function)

- 全函数: domF=A
- 全函数记作 $F:A\to B$
- A到B的全体全函数记为B^A或$A\to B$

$$B^A = A\to B = \{ F \mid F:A\to B \}$$



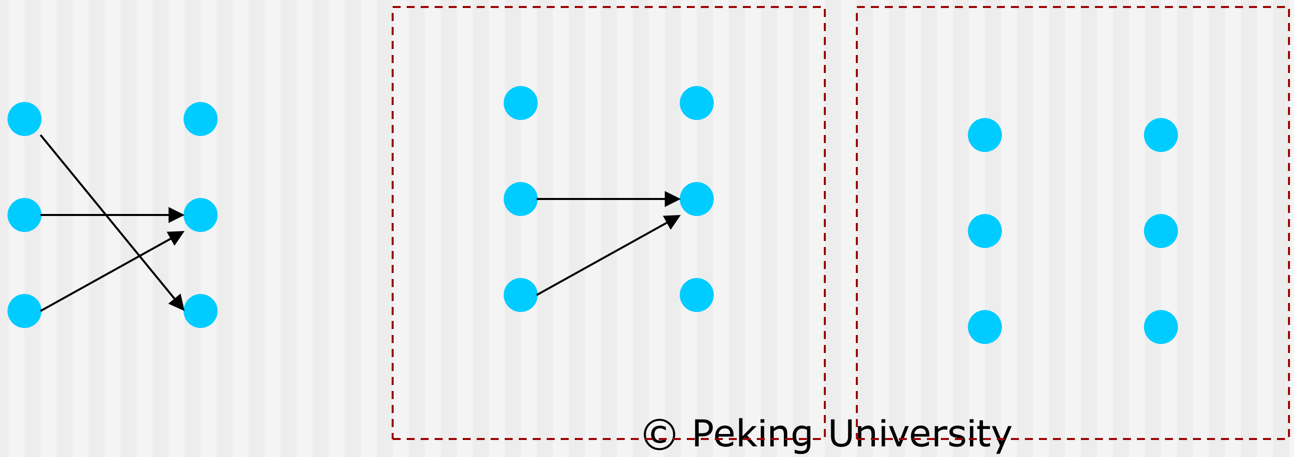
关于B^A

- $B^A = A \to B = \{F | F:A \to B\}$
  $= \{F | F$是A到B的全函数$\}$
- 全函数数: $|B^A| = |B|^{|A|}$.
- 当$A=\varnothing$时, $B^A=\{\varnothing\}$
- 当$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$时, $B^A=A\to B=\varnothing$,
  $A \mapsto B=\{\varnothing\}$.

真偏函数(proper partial function)

- 真偏函数: $\mathrm{dom}F \subset A$,
- 真偏函数记作F:A⇻B,
- A到B的全体真偏函数记为A⇻B

A⇻B = { F | F:A⇻B }



例1(续)

- 例1(续): 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$, 求A⇻B.
- 解: $f_0=\varnothing$, $f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$,

$f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

$f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

$f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$,$f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

A⇻B$=\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}$. #

- 说明: $F \in A \mathrel{\nrightarrow\!\!\!\!\shortmid} B \Rightarrow F \in \mathrm{dom}F \rightarrow B$

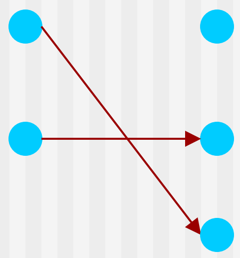
  $F \in A \nrightarrow B \Rightarrow F \in \mathrm{dom}F \rightarrow B$

- $A \nrightarrow B = A \rightarrow B \cup A \mathrel{\nrightarrow\!\!\!\!\shortmid} B$

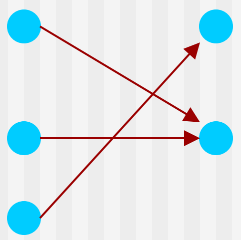
- 以下讨论A到B的全函数

全函数性质

- 设 F:A→B,
- 单射(injection): F是单根的
- 满射(surjection): ranF=B
- 双射(bijection): F既是单射又是满射, 亦称为一一映射(1-1 mapping).



单射



满射

例2

- 例2: 设$A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$,
  $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$,
  $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,
  求$A_1 \to B_1, A_2 \to B_2, A_3 \to B_3$中的单射,满射,双射.

例2(解(1))

- 例2: (1) $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$,
- 解: (1) $A_1 \to B_1$中无满射,无双射,单射6个:
  $f_1=\{<a,1>,<b,2>\}$,
  $f_2=\{<a,1>,<b,3>\}$,
  $f_3=\{<a,2>,<b,1>\}$,
  $f_4=\{<a,2>,<b,3>\}$,
  $f_5=\{<a,3>,<b,1>\}$,
  $f_6=\{<a,3>,<b,2>\}$.

例2(解(2))

- 例2: (2) $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$,
- 解: (2) $A_2 \to B_2$中无单射,无双射,满射6个:
  $f_1=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$,
  $f_2=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$,
  $f_3=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$,
  $f_4=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle\}$,
  $f_5=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$,
  $f_6=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$.

例2(解(3))

- 例2: (3) $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,
- 解: (3) $A_2 \to B_2$中双射6个:

  $f_1=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}$,

  $f_2=\{<a,1>,<b,3>,<c,2>\}$,

  $f_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,3>\}$,

  $f_4=\{<a,2>,<b,3>,<c,1>\}$,

  $f_5=\{<a,3>,<b,1>,<c,2>\}$,

  $f_6=\{<a,3>,<b,2>,<c,1>\}$. #

单射、满射和双射的数目

- 设|A|=n, |B|=m, 问A→B中有多少单射, 满射,双射?
- n<m时, A→B中无满射,双射, 单射个数为

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

- n=m时, A→B中双射个数为 n!
- n>m时, A→B中无单射,双射, 满射个数为

$$m!\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right.$$

例3

- A,B是非空有穷集,讨论下列函数的性质

1. $f:A\to B$, $g:A\to A\times B$, $\forall a\in A$,

   $$g(a)=\langle a,f(a)\rangle$$

2. $f:A\times B\to A$, $\forall \langle a,b\rangle\in A\times B$,

   $f(\langle a,b\rangle)=a$

3. $f:A\times B\to B\times A$, $\forall \langle a,b\rangle\in A\times B$,

   $f(\langle a,b\rangle)=\langle b,a\rangle$

例3(解)

1. $f:A\to B, g:A\to A\times B$, $\forall a\in A$, $g(a)=<a,f(a)>$
   - 当$|B|>1$时,g是单射,非满射,非双射
   - 当$|B|=1$时,g是单射,满射,双射
2. $f:A\times B\to A$, $\forall <a,b>\in A\times B$, $f(<a,b>)=a$
   - 当$|B|>1$时,f非单射,是满射,非双射
   - 当$|B|=1$时,f是单射,满射,双射
3. $f:A\times B\to B\times A, \forall <a,b>\in A\times B$, $f(<a,b>)=<b,a>$
   - f是单射,满射,双射

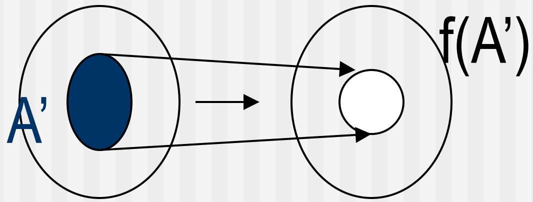
象(image), 原象(preimage)

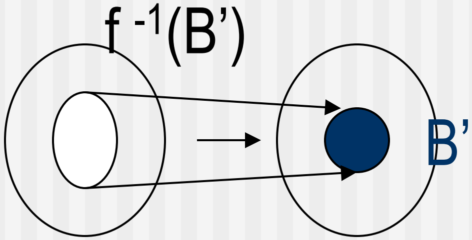
- 设 $f:A \to B$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$
- A'的象是

$$f(A') = \{y \mid x \in A' \wedge y = f(x)\} \subseteq B$$

- $f(A) = \mathrm{ran} f$
- B'的原象是

$$f^{-1}(B') = \{x \mid y \in B' \wedge f(x) = y\} \subseteq A$$





象,原象(举例)

- 例: $f:R\to R$, $f(x)=x^2$.

$A_1=[0,+\infty)$,$A_2=[1,3)$, $A_3=R$

则: $f(A_1)=[0,+\infty)$, $f(A_2)=[1,9)$, $f(A_3)=[0,+\infty)$;

$B_1=(1,4)$, $B_2 = [0,1]$, $B_3=R$

则: $f^{-1}(B_1)=(-2,-1)\cup(1,2)$, $f^{-1}(B_2)=[-1,1]$, $f^{-1}(B_3)=R$

#

定理3.1

- 设$f:C\to D$为单射,$\mathcal{C}$为C的非空子集族. $C_1,C_2\subseteq C$,则
  1. $f(\cup\mathcal{C}) = \cup\{f(A)|A\in\mathcal{C}\}$
  2. $f(\cap\mathcal{C}) = \cap\{f(A)|A\in\mathcal{C}\}$
  3. $f(C_1-C_2) = f(C_1)-f(C_2)$.
- 证明: 利用定理2.9和f的单射性. #

回顾：像的运算定理

- **定理2.9** 设R,S,A,B, $\mathcal{A}$为集合, $\mathcal{A}\neq\varnothing$,则

(1) $R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$;

(2) $R[\cup\mathcal{A}]=\cup\{R[A]|A\in\mathcal{A}\}$;

(3) $R[A\cap B]\subseteq R[A]\cap R[B]$;

(4) $R[\cap A]\subseteq\cap\{R[A]|A\in\mathcal{A}\}$;

(5) $R[A]-R[B]\subseteq R[A-B]$;

(6) $(R\circ S)[A]=R[S[A]]$.

定理3.2

- 设$f:C\to D$, $D_1,D_2\subseteq D$, $\mathcal{D}$是D的非空子集族. 则

1. $f^{-1}(\cup\mathcal{D}) = \cup\{f^{-1}(D)|D\in\mathcal{D}\}$
2. $f^{-1}(\cap\mathcal{D}) = \cap\{f^{-1}(D)|D\in\mathcal{D}\}$
3. $f^{-1}(D_1-D_2) = f^{-1}(D_1)-f^{-1}(D_2)$.

- 证明: 利用逆都是单根的和定理3.1. #

特殊函数

- 常数函数:

  $f:A\to B,\ \exists b\in B,\ \forall x\in A,\ f(x)=b$

- 恒等函数:

  $I_A:A\to A,\ I_A(x)=x$

- 特征函数:

  $\chi_A:E\to\{0,1\},\ \chi_A(x)=1\Leftrightarrow x\in A$

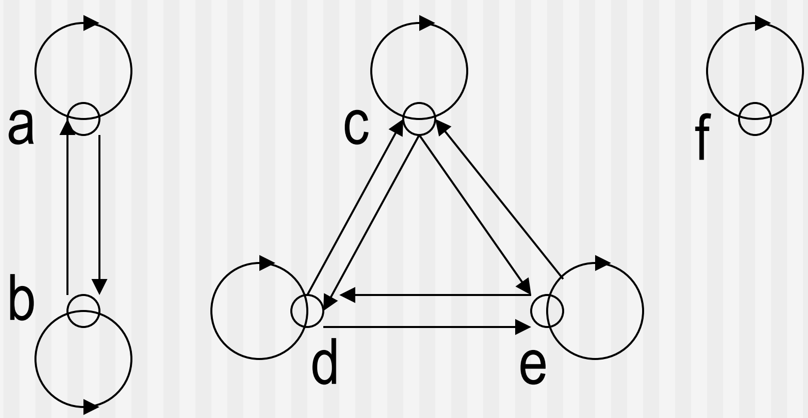
当$\varnothing\subset \mathbf{A}\subset\mathbf{E}$时, χ_A是满射

与偏序关系和等价关系相关的概念

- 单调函数: $f:A\to B$, $<A,\preccurlyeq_A>$, $<B,\preccurlyeq_B>$偏序集
  - 单调增: $\forall x,y\in A,\ x \preccurlyeq_A y \Rightarrow f(x) \preccurlyeq_B f(y)$
  - 单调减: $\forall x,y\in A,\ x \preccurlyeq_A y \Rightarrow f(y) \preccurlyeq_B f(x)$,
  - 严格单调: 把$\preccurlyeq$换成$\prec$
- 自然映射: $f:A\to A/R$, $f(a)=[a]_R$, R为A上等价关系
  - 只有恒等关系才是单射

自然映射(举例)

- 例: $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A/R=\{\{a,b\},\{c,d,e\},\{f\}\}$, $[a]=[b]=\{a,b\}$, $[c]=[d]=[e]=\{c,d,e\}$, $[f]=\{f\}$, $F:A\to A/R$, $F(x)=[x]$.
  $F(a)=\{a,b\}$, $F(b)=\{a,b\}$, $F(\ c\ )=\{c,d,e\}$, $F(d)=\{c,d,e\}$, $F(e)=\{c,d,e\}$, $F(f)=\{f\}$. #



函数运算

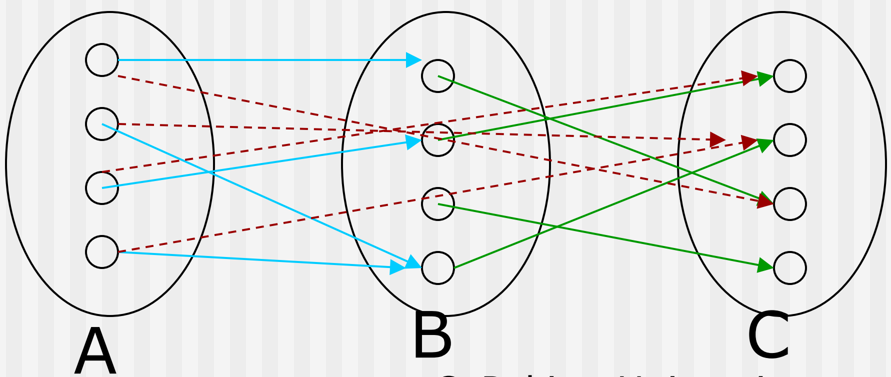
- 合成(复合): 性质, 单调性
- 反函数: 存在条件(双射才有反函数)
- 单边逆: 左逆, 右逆, 存在条件

函数合成(composite)

- 定理3.3: 设 $g:A\to B$, $f:B\to C$, 则

  $f\circ g: A\to C$, $f\circ g(x)=f(g(x))$.

- 证明:
  - $f\circ g$是函数(即$f\circ g$单值)
  - $\mathrm{dom}\ f\circ g = A$
  - $\mathrm{ran}\ f\circ g \subseteq C$, $f\circ g(x)=f(g(x))$



定理3.3(证明)

- 证明: (1) $f\circ g$是函数,即$f\circ g$是单值的.

$\forall x\in f\circ g$, 若$\exists z_1,z_2\in ran(f\circ g)$,则

$x(f\circ g)z_1\wedge x(f\circ g)z_2$

$\Leftrightarrow\exists y_1(y_1\in B\wedge xgy_1\wedge y_1fz_1)\wedge\exists y_2(y_2\in B\wedge xgy_2\wedge y_2fz_2)$

$\Leftrightarrow\exists y_1\exists y_2(y_1\in B\wedge y_2\in B\wedge xgy_1\wedge xgy_2\wedge y_1fz_1\wedge y_2fz_2)$

$\Rightarrow\exists y(y\in B\wedge y_1=y_2=y\wedge y_1fz_1\wedge y_2fz_2)$

$\Rightarrow z_1=z_2$

定理3.3(证明续)

- 证明: (2) $dom(f\bigcirc g) = A$.

  显然$dom(f\bigcirc g) \subseteq A$,下证$A \subseteq dom(f\bigcirc g)$,

$\forall x,\ x \in A$

$\Rightarrow\ \exists! y(y \in B \wedge xgy)$

$\Rightarrow\ \exists! y \exists! z(y \in B \wedge z \in C \wedge xgy \wedge yfz)$

$\Rightarrow\ \exists! z(z \in C \wedge x(f\bigcirc g)z)$

$\Rightarrow\ x \in dom(f\bigcirc g)$.

定理3.3(证明续)

- 证明: (3) $f\circ g(x)=f(g(x))$.

由(1)(2)知$f\circ g:A\rightarrow C$,

$\forall x, x\in A$

$\Rightarrow \exists! z(z\in C\wedge z=f\circ g(x))$

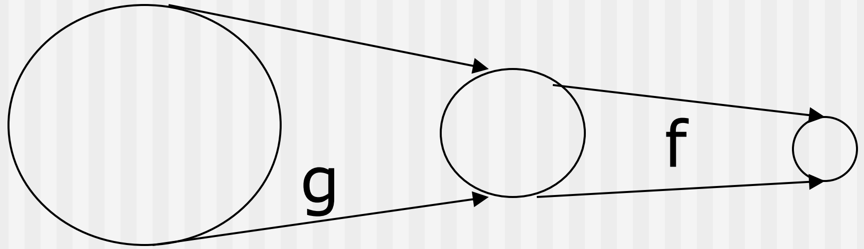
$\Leftrightarrow \exists! z\exists! y(z\in C\wedge y\in B\wedge y=g(x)\wedge z=f(y))$

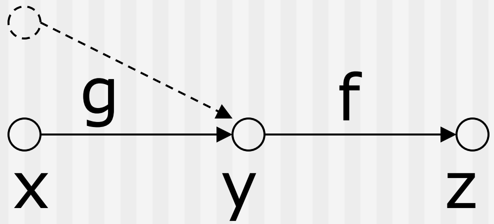
$\Leftrightarrow \exists! z(z\in C\wedge z=f(g(x)))$

所以对任意$x \in A$, 有,$f\circ g(x)=f(g(x))$. #

定理3.4

- 定理3.4: 设 $g:A\to B$, $f:B\to C$, $f\circ g:A\to C$,则
  (1) f,g均为满射, 则 $f\circ g$也是满射.
  (2) f,g均为单射, 则 $f\circ g$也是单射.
  (3) f,g均为双射, 则 $f\circ g$也是双射. #





定理3.4(证明)

- 证明: (1) f,g均为满射, 则 $f\circ g$也是满射. $\forall z, z\in C$

$\Rightarrow \exists y(y\in B\wedge z=f(y))$

$\Rightarrow \exists y\exists x(y\in B\wedge z=f(y)\wedge x\in A\wedge y=g(x))$

$\Rightarrow \exists y\exists x(y\in B\wedge x\in A\wedge z=f(g(x))=f\circ g(x))$

$\Rightarrow \exists x(x\in A\wedge z=f\circ g(x))$

所以$f\circ g(x)$是满射 #

定理3.4(证明续)

- 证明: (2) f,g均为单射, 则 $f\bigcirc g$也是单射.

  $\exists z, z\in C$，存在$x_1,x_2\in A$ 使得

$x_1(f\bigcirc g)z \wedge x_2(f\bigcirc g)z$

$\Rightarrow \exists y_1\exists y_2(y_1\in B\wedge y_2\in B\wedge y_1fz\wedge x_1gy_1\wedge y_2fz \wedge x_2gy_2)$

$\Rightarrow y_1=y_2 \wedge x_1=x_2$

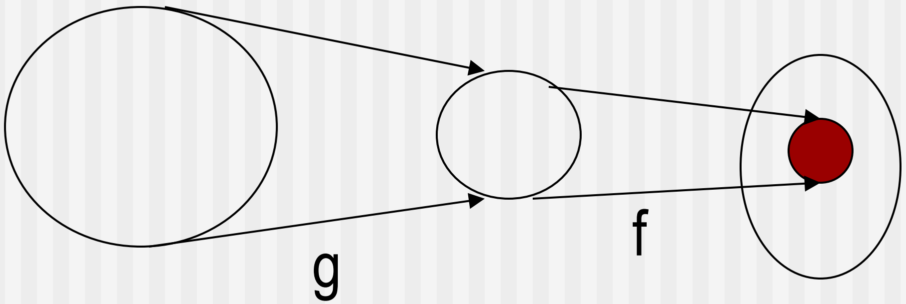
$\Rightarrow x_1=x_2$

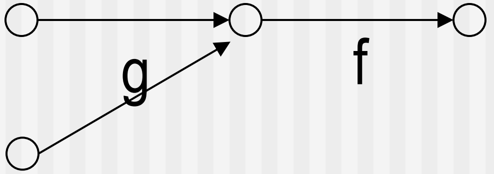
所以$f\bigcirc g(x)$是单射

由(1),(2)的证明保证(3)的正确性 #

定理3.5

- 定理3.5: 设 $g:A\to B$, $f:B\to C$, 则
  (1) 若$f\circ g$为满射, 则f是满射.
  (2) 若$f\circ g$为单射, 则g是单射.
  (3) 若$f\circ g$为双射, 则g是单射,f是满射.
  #





定理3.5(证明)

- 证明: (1) $f \circ g$也是满射. 则f是满射
  $\forall z, z \in C$

$\Rightarrow \exists x(x \in A \wedge x(f \circ g)z)$

$\Rightarrow \exists y \exists x(x \in A \wedge y \in ran(g) \subseteq B \wedge xgy \wedge yfz)$

$\Rightarrow \exists y \exists x(x \in A \wedge y \in B \wedge y=g(x) \wedge z=f(y))$

$\Rightarrow \exists y(y \in B \wedge z=f(y))$

所以f是满射 #

定理3.5(证明续)

- 证明: (2) $f\circ g$也是单射. 则g是单射

若存在$y\in ran(g)\subseteq B$, 存在$x_1,x_2\in A$

$x_1gy \wedge x_2gy$

$\Rightarrow \exists z(z\in ran(f)\subseteq C \wedge yfz \wedge x_1gy\wedge x_2gy)$

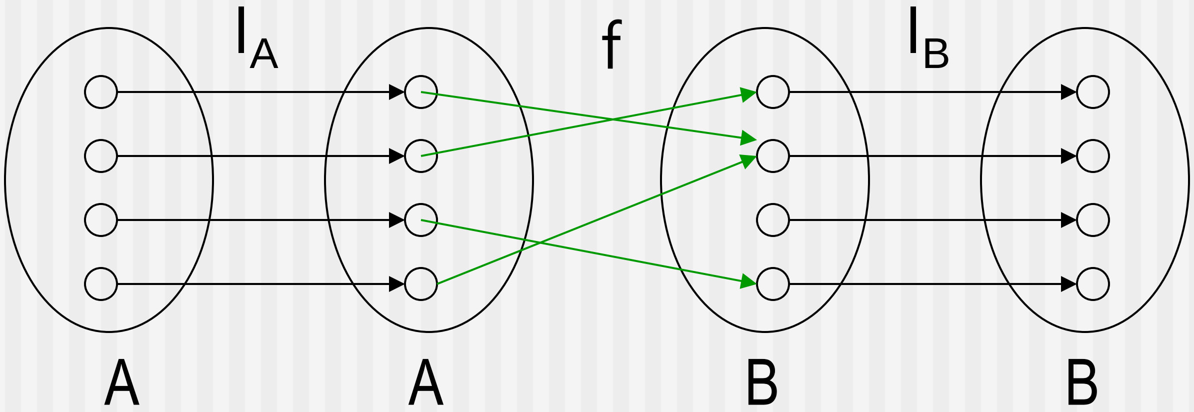
$\Rightarrow \exists z(z\in C \wedge x_1(f\circ g)z\wedge x_2(f\circ g)z)$

$\Rightarrow x_1=x_2$

所以g是单射 #

定理3.6

- 定理3.6: 设 $f:A\to B$, 则 $f=f\circ I_A=I_B\circ f$. #



定理3.7(单调性)

- 定理3.7: 设 $f:R\to R$, $g:R\to R$, 且f,g按$\le$是单调增的, 则$f\circ g$也是单调增的.
- 证明: $x\le y \Rightarrow g(x)\le g(y)$ $\Rightarrow f(g(x))\le f(g(y))$. #

定理3.8

- 定理3.8: 设A为集合,则

  A^{-1}为函数 $\Leftrightarrow$ A为单根的. #
- 推论: 设R为二元关系,则

  R为函数 $\Leftrightarrow$ R^{-1}为单根的. #

定理3.8证明

A^{-1}为函数 $\Leftrightarrow$ A为单根的

证明： 先证$\Rightarrow$

若存在$y \in \mathrm{ran}A$,存在$x_1,x_2 \in \mathrm{dom}A$,使得

$(x_1,y) \in A \wedge (x_2,y) \in A$

$\Leftrightarrow (y, x_1) \in A^{-1} \wedge (y, x_2) \in A^{-1}$

$\Rightarrow x_1=x_2$

所以，A是单根的

类似可证 $\Leftarrow$

反函数(inverse function)

- 定理3.9: 设 $f:A\to B$, 且为双射,则
  $f^{-1}:B\to A$, 且也为双射. #

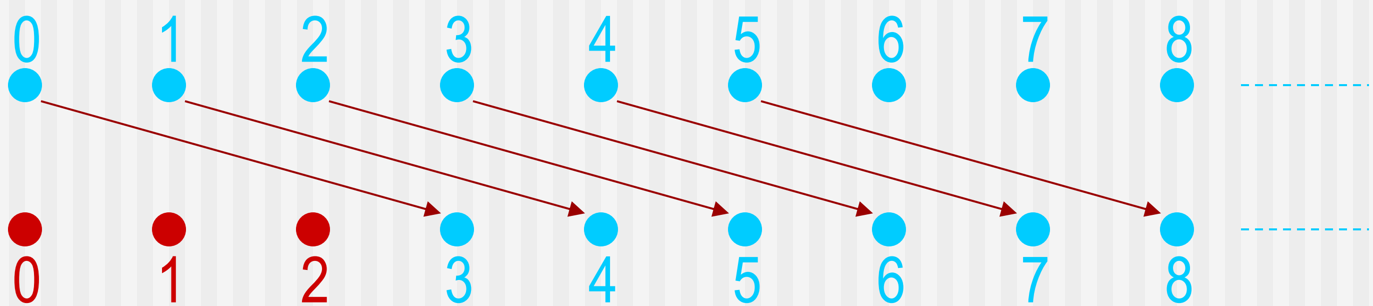
- 反函数: 若$f:A\to B$为双射, 则$f^{-1}:B\to A$称为f的反函数.

构造双射及求反函数

- $|A|=m$, $|B|=n$,

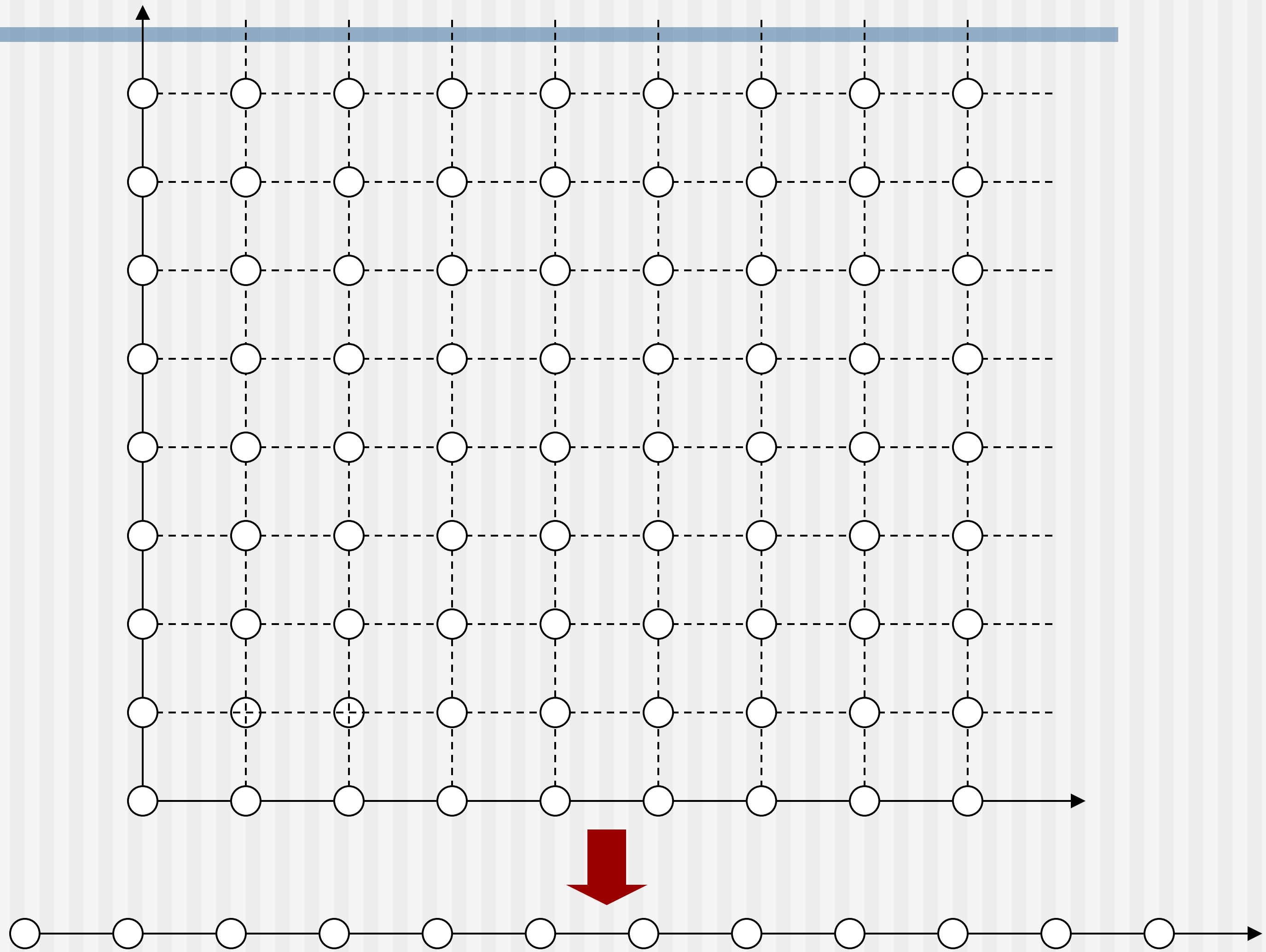
  $A\to B$存在双射 $\Leftrightarrow$ $n=m$
- $|A|=\infty$, $|B|=\infty$, $B\subset A$, $A\to B$可存在双射,例

  $f: N\to N-\{0,1,2\}$, $f(n)=n+3$



- $[0,1]\to(0,1)$? $R\to(0,1)$?
- $N\times N\to N$?

例3.6:构造N×N→N双射,反函数？



方法1：用自然数的特殊表示法

$\forall n \in N \wedge n \neq 0$, $\exists \alpha, \beta \in N$, β为奇数，使得

$$n=2^{\alpha}\beta$$

例：$1= 2^0 \times 1$, $2= 2^1 \times 1$, $3= 2^0 \times 3, \ldots,$

$$6=2^1 \times 3, \ldots, 100=2^2 \times 25, \ldots$$

令$n=2^{\alpha}\beta-1$,可以去掉$n\neq 0$的条件

令$\beta=2j+1$, β为奇数

$\forall n \in N$, $n=2^i(2j+1)-1$, $i,j \in N$, 此表示唯一.

方法1: $f:N\times N\to N$

- $f:N\times N\to N$, $f^{-1}:N\to N\times N$, $\forall\langle i,j\rangle\in N\times N$,

$$f(\langle i,j\rangle)=2^i(2j+1)-1,$$

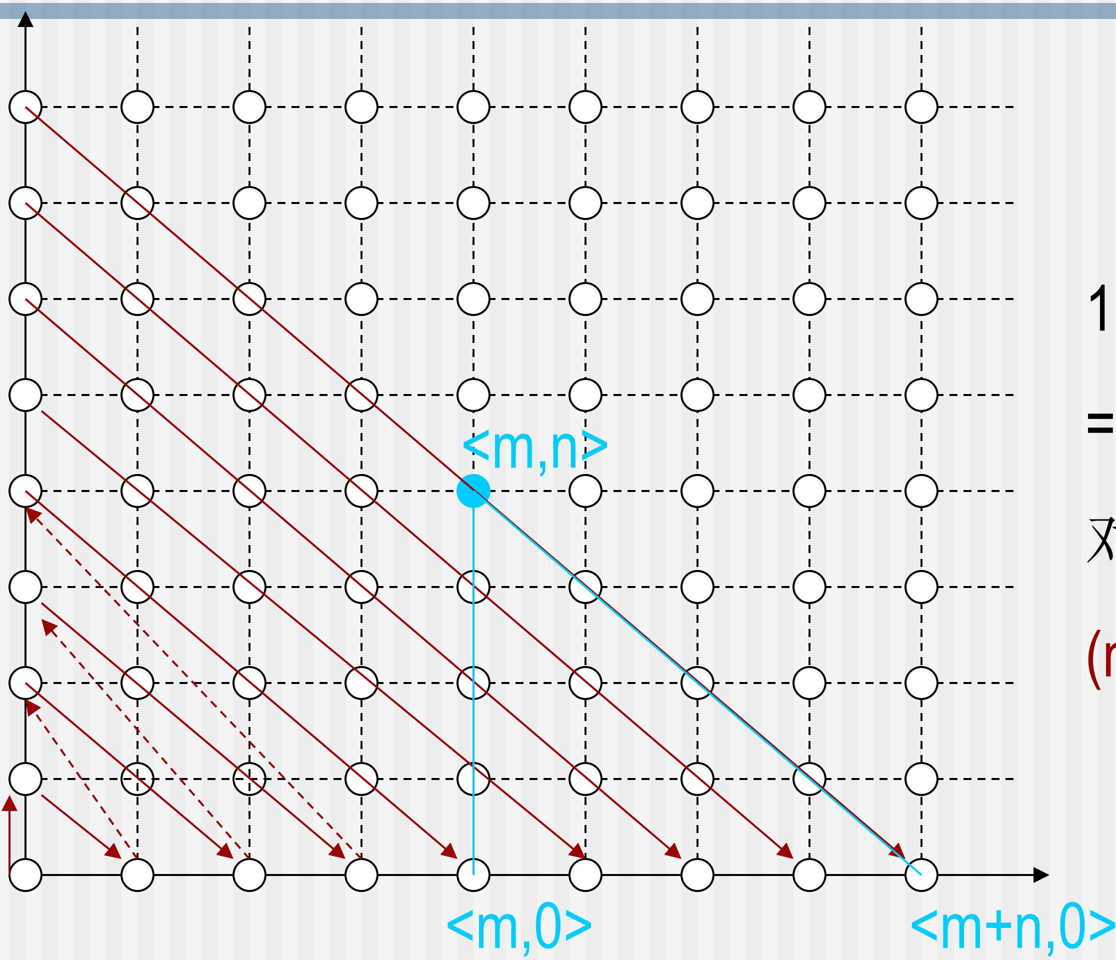
$$f^{-1}(n)=f^{-1}(2^i(2j+1)-1)=\langle i,j\rangle.$$

- 例: $f(\langle 0,0\rangle)=0$, $f(\langle 0,1\rangle)=2$, $f(\langle 1,0\rangle)=1$,…

$f^{-1}(5)=\langle 1,1\rangle$, $f^{-1}(101)=\langle 1,25\rangle$,

$f^{-1}(200)=\langle 0,100\rangle$,…

方法2:Cantor编码—对角线法



$1+2+3+\ldots+(m+n)+(m+1)$

$=(m+n)(m+n+1)/2+(m+1)$

对应的自然数为

$(m+n)(m+n+1)/2+m$

方法2: $f: N\times N\to N$

- $f: N\times N\to N$, $f^{-1}: N\to N\times N$, $\forall <m,n>\in N\times N$,

  $f(<m,n>)=(m+n)(m+n+1)/2+m$,

- 求 $f^{-1}(r)=<?,?>=<m,n>$.

$r=(m+n)(m+n+1)/2+m=t(t+1)/2+m$, $t=m+n$,

$0\le m\le t$, 求最大t, 使得$r\ge t(t+1)/2$.

$t^2+t-2r\le 0$, $t=\left\lfloor \frac{1}{2}(\sqrt{1+8r}-\right.$, $m=r-t(t+1)/2$, $n=t-m$.

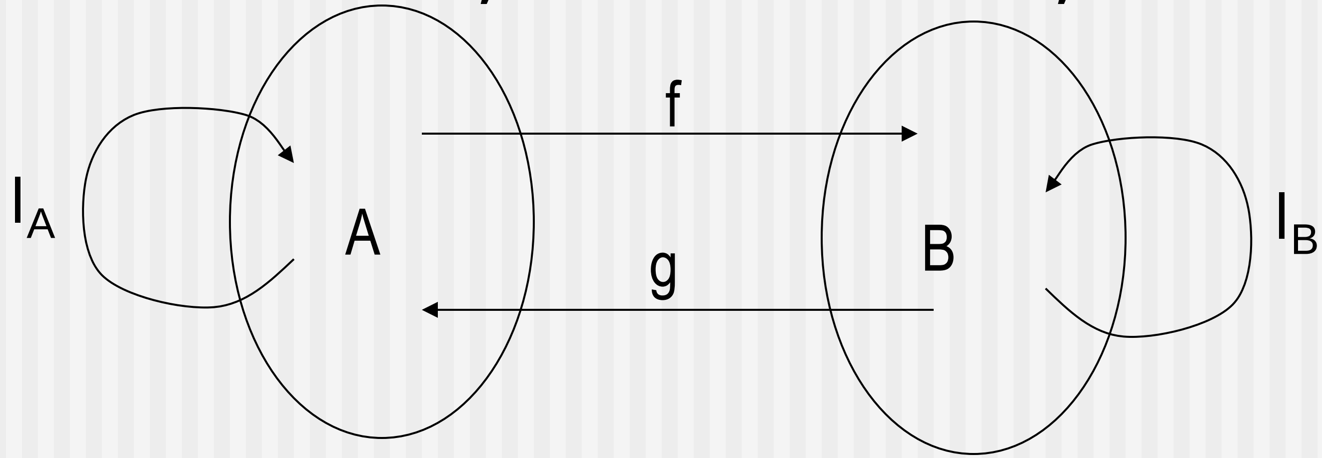
- 例: $f^{-1}(0)=<0,0>$, $f^{-1}(1)=<0,1>$,

$f^{-1}(2)=<1,0>$, $f^{-1}(3)=<0,2>$, …

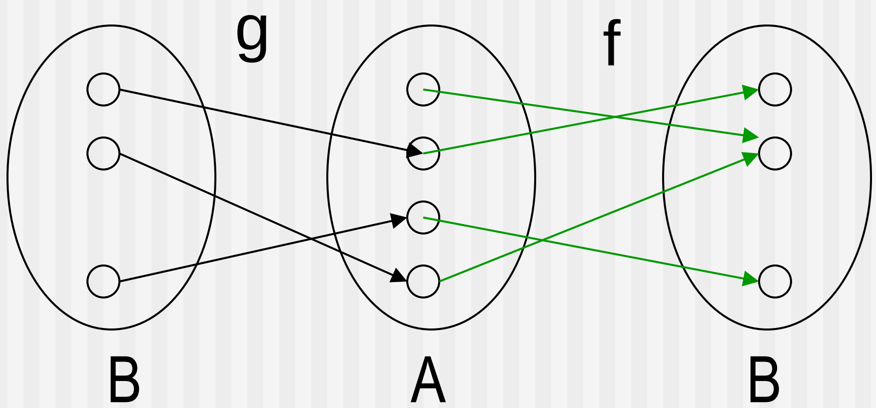
左逆、右逆

- 设$f:A\to B$，$g:B\to A$
- 左逆： g是f的左逆 $\Leftrightarrow$ $g\circ f=I_A$,
- 右逆： g是f的右逆 $\Leftrightarrow$ $f\circ g=I_B$,

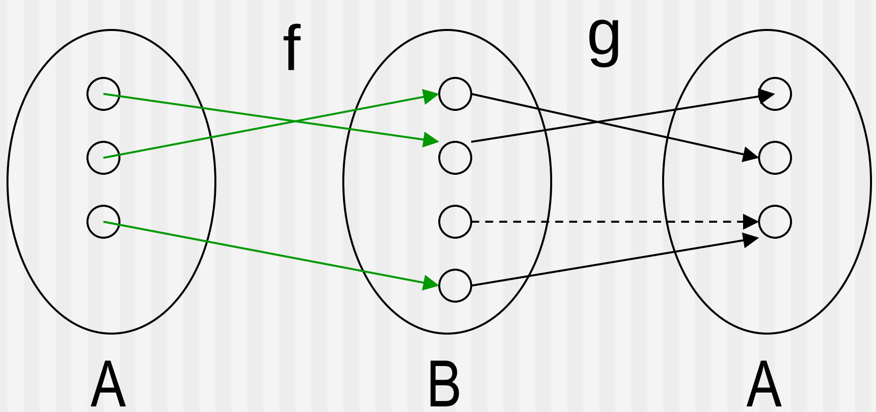
若$f:A\to B$为双射,f^{-1}既是f的左逆,又是f的右逆



举例



$f \circ g = I_B$



$g \circ f = I_A$

定理3.10

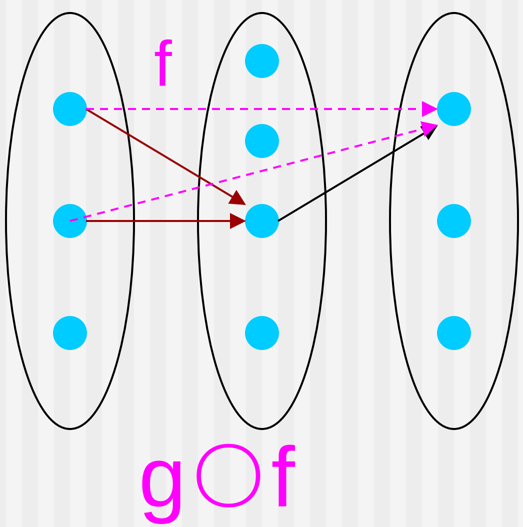
- 定理3.10: 设 $f:A\to B$, 且$A\neq\emptyset$,则

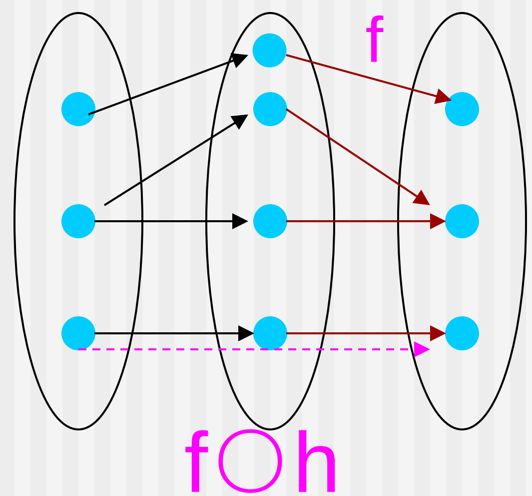
  (1) f 存在左逆 $\Leftrightarrow$ f 是单射;

  (2) f 存在右逆 $\Leftrightarrow$ f 是满射;

  (3) f 存在左逆,右逆 $\Leftrightarrow$ f 是双射

  $\Leftrightarrow$ f 的左逆和右逆相等. #





定理3.10(证明)

- 证明：f 存在左逆 $\Leftrightarrow$ f 是单射;

证$\Rightarrow$：设g是f的左逆,$g\circ f=I_A$, I_A是单射,所以f是单射;

证$\Leftarrow$：f是单射的,因而$f:A\to \mathrm{ran}f$是双射的,所以由定理3.9,$f^{-1}\restriction \mathrm{ran}f$: $\mathrm{ran}f\to A$是双射的,存在$a\in A$,构造g如下：

$$g(y)=\begin{cases} f^{-1}(y), & y \in \mathrm{ran}f \\ a, & y \in B-\mathrm{ran}f \end{cases}$$

则$g:B\to A$为f的一个左逆，任意$x\in A$,

$g\circ f(x)=g(f(x))=f^{-1}(f(x))=x$

定理3.10(证明续)

- 证明：f 存在右逆 $\Leftrightarrow$ f 是满射;

证$\Rightarrow$：设h是f的右逆,$f\circ h=I_B$, I_B是满射,所以f是满射;

证$\Leftarrow$：f不一定是单射,因而f^{-1}不一定是函数,但一定是定义域为B的二元关系,构造$h:B\to A$如下：

任意$y\in B$,$f^{-1}(\{y\})=\{x|f(x)=y\}\neq\varnothing$(由于f是满射),取一个$x_0\in f^{-1}(\{y\})$,令$h(y)=x_0$,

则$h:B\to A$为f的一个右逆，任意$y\in B$,

$f\circ h(y)=f(h(y))=f(x_0)=y$

小结

- 概念:
  - 函数,偏函数,全函数,真偏函数
- 性质:
  - 单射, 满射, 双射
  - 计数
- 运算:
  - 合成
  - 反函数
  - 逆

作业

- P68: 3, 19, 20