2.8 序关系

- 偏序,线序,拟序,良序
- 哈斯图
- 特殊元素: 最大/小元, 极大/小元, 上/下界, 上/下确界
- (反)链

偏序(partial order)关系

- 偏序关系: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 若R是自反的, 反对称的, 传递的, 则称R为偏序关系
- 通常用 $\preccurlyeq$ 表示偏序关系,读作 "小于等于"

$$\langle x,y \rangle \in R \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow x \preccurlyeq y$$

- 偏序集: $<A, \preccurlyeq>$, $\preccurlyeq$ 是A上偏序关系

偏序集$<A,\leq>$, $<A,\geq>$, $<A,|>$

- $\varnothing \neq A \subseteq R$

  $\leq \; = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \leq y \}$,

  $\geq \; = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \geq y \}$,

- $\varnothing \neq A \subseteq Z_+ = \{ x \mid x \in Z \wedge x > 0 \}$

  $| \; = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x | y \}$

偏序集$<\mathcal{A},\subseteq>$

- $\mathcal{A}\subseteq P(A)$, $\subseteq = \{ <x,y> \mid x,y\in\mathcal{A} \wedge x\subseteq y \}$
- 设$A=\{a,b\}$, $\mathcal{A}_1=\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$, $\mathcal{A}_2=\{\{a\},\{a,b\}\}$,

$\mathcal{A}_3=P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,则

$$\subseteq_1 = I_{\mathcal{A}1} \cup \{ <\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}> \}$$

$$\subseteq_2 = I_{\mathcal{A}2} \cup \{ <\{a\},\{a,b\}> \}$$

$$\subseteq_3 = I_{\mathcal{A}3} \cup \{ <\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>, <\varnothing,\{a,b\}>, <\{a\},\{a,b\}>, <\{b\},\{a,b\}> \}$$

偏序集$<\pi, \leq_{加细}>$

- $A\neq\varnothing$, π是由A的一些划分组成的集合

  $\leq_{加细} = \{ <x,y> \mid x,y\in\pi \wedge x是y的加细 \}$

- 设$A=\{a,b,c\}$,

  $\mathcal{A}_1=\{\{a,b,c\}\}$,$\mathcal{A}_2=\{\{a\},\{b,c\}\}$,

  $\mathcal{A}_3=\{\{b\},\{a,c\}\}$,$\mathcal{A}_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$,

  $\mathcal{A}_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$

取$\pi_1=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\}$,$\pi_2=\{\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3\}$,$\pi_3=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_5\}$

$\leq_1 = I_{\pi 1} \cup \{ <\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_1> \}$, $\leq_2 = I_{\pi 2}$,

$\leq_3 = I_{\pi 3} \cup \{ <\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_1>,<\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_1>, <\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_1>,$
$<\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_1>,<\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_2>,<\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_3>,<\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_4>\}$. #

哈斯图(Hasse diagram)

- 设$<A, \leq>$是偏序集, $x,y \in A$
- 可比(comparable):

  x与y可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$
- 覆盖(cover):

  y覆盖$x \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge \neg\exists z(z \in A \wedge x \preccurlyeq z \preccurlyeq y)$
- 哈斯图: 当且仅当y覆盖x时,在x与y之间画无向边, 并且x画在y下方.
  - 省去每个顶点的环
  - 若$x \prec y$,但y不覆盖x, 省去x与y之间的连线

例2.16(1)(2)

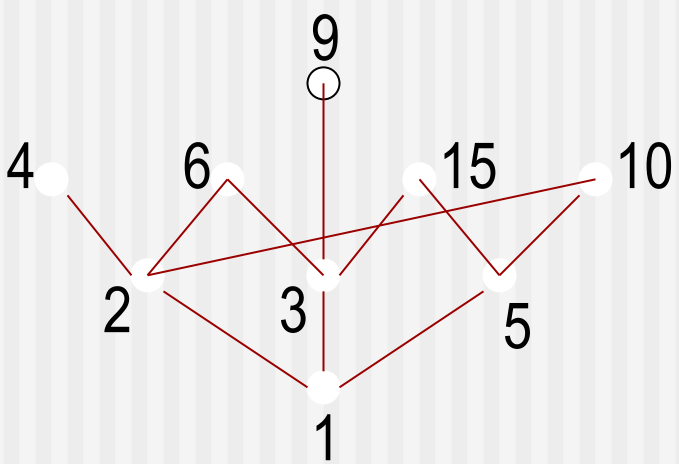
- 画出下列偏序关系的哈斯图.

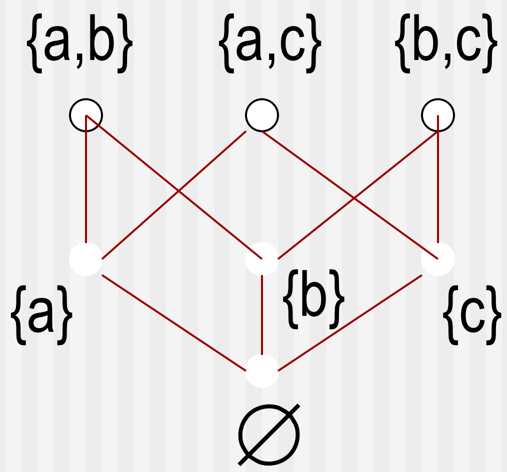
(1) $<A,|>$, $A=\{1,2,3,4,5,6,9,10,15\}$

(2) $<\mathcal{A},\subseteq>$, $A=\{a,b,c\}$, $\mathcal{A}\subseteq P(A)$,

$\mathcal{A}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$

- 解:





例2.16(3)

- 画出下列偏序关系的哈斯图.

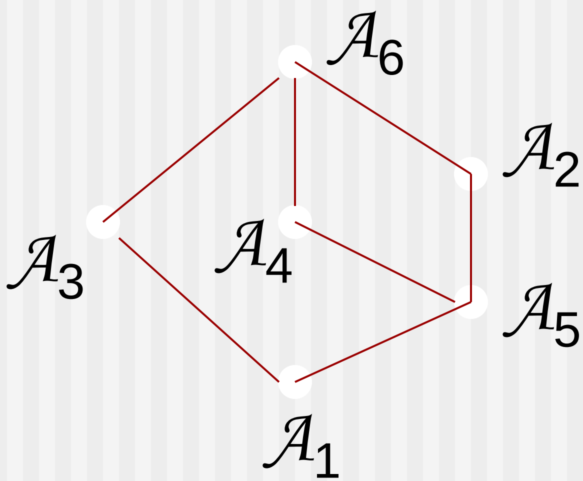
(3) $<\pi, \leq_{加细}>$, $\pi=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_6\}$, $A=\{a,b,c,d\}$

$\mathcal{A}_1 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\} \}$, $\mathcal{A}_2 = \{ \{a,b\}, \{c,d\} \}$,

$\mathcal{A}_3 = \{ \{a,c\}, \{b,d\} \}$, $\mathcal{A}_4 = \{ \{a\}, \{b,c,d\} \}$,

$\mathcal{A}_5 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c,d\} \}$, $\mathcal{A}_6 = \{ \{a,b,c,d\} \}$

- 解:



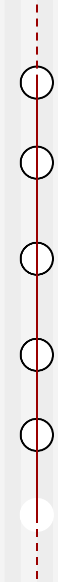
#

全序(total order)关系

- 全序关系: 若偏序集$<A, \preccurlyeq>$满足

  $\forall x \forall y(x \in A \land y \in A \to x$与$y$可比$)$

  则称$\preccurlyeq$为全序关系, 称$<A, \preccurlyeq>$为全序集
- 全序关系亦称线序(linear order)关系
- 例: $<A, \leq>$, $<A, \geq>$



拟序(quasi-order)关系

- 拟序关系：设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 若R是反自反的, 传递的, 则称R为拟序关系
- 通常用$\prec$表示拟序关系
- 反自反性与传递性蕴涵反对称性
- 拟序集：$\langle A, \prec \rangle$, $\prec$是A上拟序关系
- 例子：设$\varnothing\neq A\subseteq R$, $\varnothing\neq B\subseteq Z_+$

  $\langle A,<\rangle,\langle A,>\rangle,\langle B,|'\rangle,\langle \mathcal{A},\subset\rangle$

  $|' = \{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in B \wedge x|y \wedge x\neq y\}$

定理2.29

- 定理2.29:设$\preccurlyeq$是非空集合A上偏序关系, $\prec$是A上拟序关系,则
  (1) $\prec$是反对称的;
  (2) $\preccurlyeq - I_A$是A上拟序关系;
  (3) $\prec \cup I_A$是A上偏序关系.
- 证明: (1) $x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x \prec x$, 矛盾!
  (2)(3) 显然.

- 偏序关系与拟序关系的本质区别在于前者具有自反性，后者具有反自反性，但是可以互相转化。
- 共同实质是均具有反对称性和传递性
- 拟序关系与偏序关系的哈斯图在画法上完全相同，注意前者顶点均无环。

定理2.30

- 定理2.30:设$\prec$是非空集合A上拟序关系,则

  (1) $x \prec y$, $x=y$, $y \prec x$中至多有一式成立;

  (2) $(x \prec y \vee x=y) \wedge (y \prec x \vee y=x) \Rightarrow x=y$.

- 证明: (1) 两式以上成立导致 $x < x$, 矛盾!

(2) 若$x \neq y$,则$x=y$,与$y=x$为假,则可以推出 $(x < y) \wedge (y < x)$, (由已知条件)

与(1)矛盾! #

三歧性(trichotomy)

- 三歧性：设$\prec$是非空集合A上拟序关系，若$x\prec y, x=y, y\prec x$中有且仅有一式成立,则称$\prec$ 具有三歧性.
- 拟全序关系:设$\prec$是非空集合A上拟序关系，若$\prec$具有三歧性，则称$\prec$为拟全序关系，或拟线序关系,称$\langle A,\prec\rangle$为拟线序集.

- 最大元, 最小元
- 极大元, 极小元
- 上界, 下界
- 最小上界(上确界), 最大下界(下确界)

最大元，最小元

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集，$B\subseteq A$, $y\in B$
- 最大元(maximum/greatest element):
  y是B的最大元 $\Leftrightarrow$
  $$\forall x(\ x\in B \rightarrow x\preccurlyeq y\ )$$
- 最小元(minimum/least element):
  y是B的最小元 $\Leftrightarrow$
  $$\forall x(\ x\in B \rightarrow y\preccurlyeq x\ )$$

最大元, 最小元举例(例16(1))

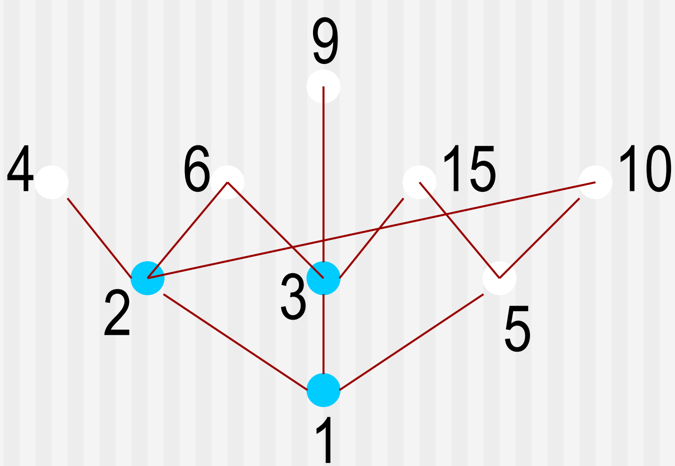
- 例16(1): <A,|>, A={1,2,3,4,5,6,9,10,15}

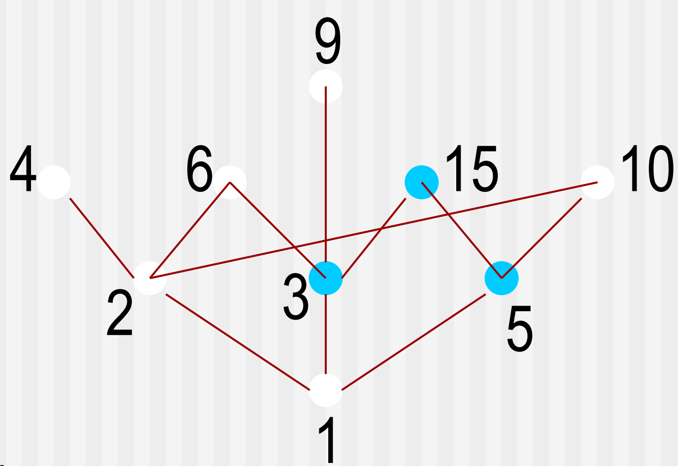
  B_1={1,2,3}, B_2={3,5,15}, B_3=A.

  B_1的最大元是{}, B_1的最小元是{1}

  B_2的最大元是{15}, B_2的最小元是{}

  B_3的最大元是{}, B_3的最小元是{1}





极大元,极小元

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$
- 极大元(maximal element):

  y是B的极大元 $\Leftrightarrow \forall x(x\in B \wedge y\preccurlyeq x \to x=y)$

  (没有比y大的元素)
- 极小元(minimal element):

  y是B的极小元 $\Leftrightarrow \forall x(x\in B \wedge x\preccurlyeq y \to x=y)$

  （没有比y小的元素）

极大元,极小元举例(例16(1))

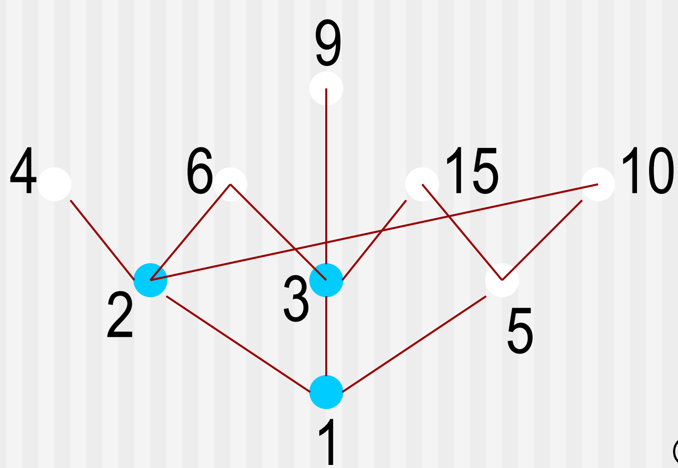
- 例16(1): <A,|>, A={1,2,3,4,5,6,9,10,15}

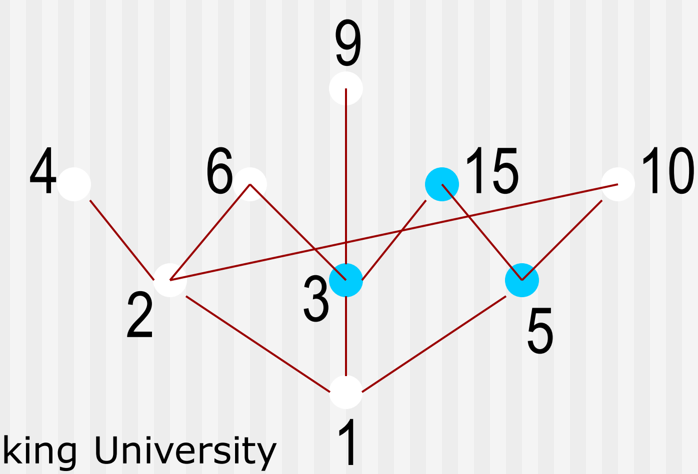
  B_1={1,2,3}, B_2={3,5,15}, B_3=A.

B_1的极大元是{2,3}, B_1的极小元是{1}

B_2的极大元是{15}, B_2的极小元是{3,5}

B_3的极大元是{4,6,9,15,10}, B_3的极小元是{1}





上界, 下界

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$
- 上界(upper bound):

  y是B的上界 $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$$

- 下界(lower bound):

  y是B的下界 $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$$

上界, 下界举例(例16(1))

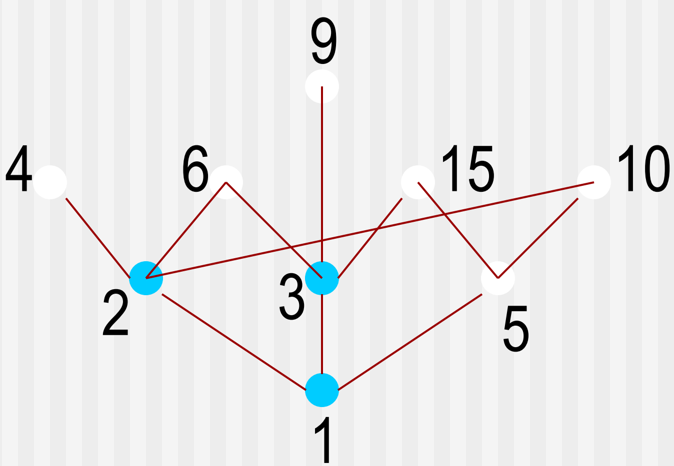
- 例16(1): <A,|>, A={1,2,3,4,5,6,9,10,15}

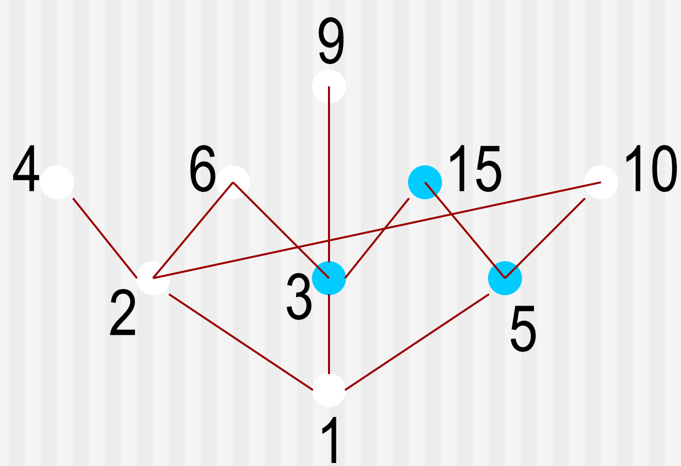
  B_1={1,2,3}, B_2={3,5,15}, B_3=A.

  B_1的上界是{6}, B_1的下界是{1}

  B_2的上界是{15}, B_2的下界是{1}

  B_3的上界是{}, B_3的下界是{1}





最小上界, 最大下界

- 设<A,≼>为偏序集, B⊆A
- 最小上界(least upper bound):

  设 C = { y | y是B的上界 }, C的最小元称为B的最小上界, 或上确界.
- 最大下界(greatest lower bound):

  设 C = { y | y是B的下界 }, C的最大元称为B的最大下界, 或下确界.

最小上界,最大下界举例(例16(1))

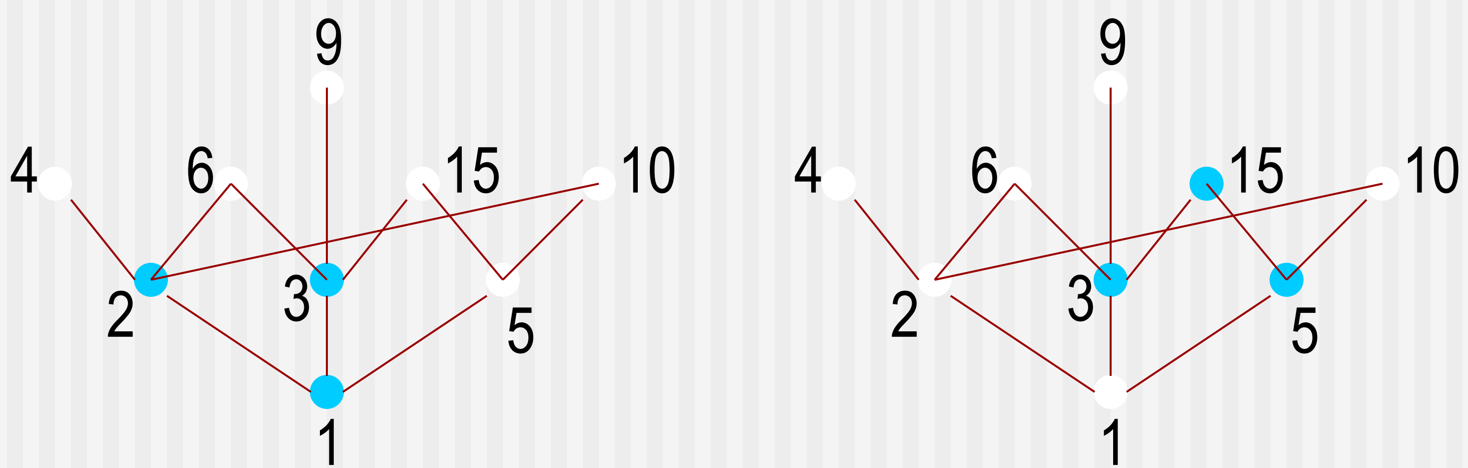
- 例16(1): <A,|>, A={1,2,3,4,5,6,9,10,15}

  B_1={1,2,3}, B_2={3,5,15}, B_3=A.

  B_1的最小上界是{6}, B_1的最大下界是{1}

  B_2的最小上界是{15}, B_2的最大下界是{1}

  B_3的最小上界是{}, B_3的最大下界是{1}



特殊元素比较

	存在(B非空有穷)	唯一	∈B
最大元	×(表示不一定)	√	√
最小元	×	√	√
极大元	√ (表示一定)	×	√
极小元	√	×	√
上界	×	×	×
下界	×	×	×
上确界	×	√	×
下确界	×	√	×

链(chain), 反链(antichain)

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$,
- 链(chain): B是A中的链 $\Leftrightarrow$

  $\forall x \forall y(\ x \in B \wedge y \in B \rightarrow x$与$y$可比 $)$

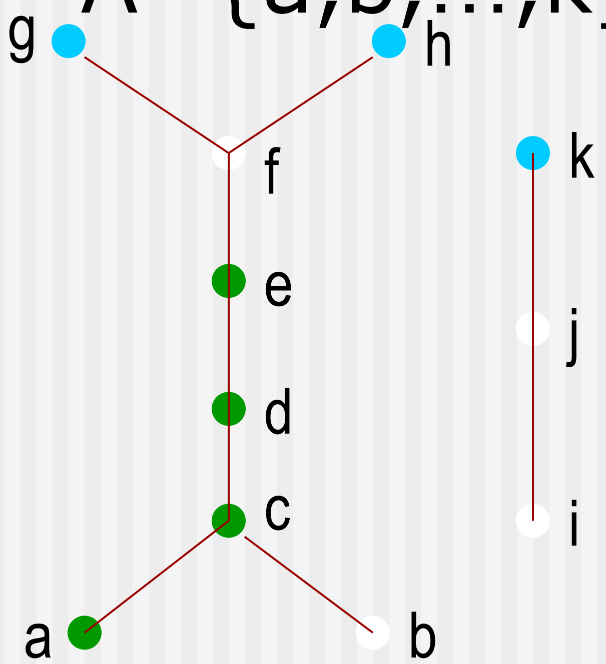
  $|B|$称为链的长度
- 反链(antichain): B是A中的反链 $\Leftrightarrow$

  $\forall x \forall y(\ x \in B \wedge y \in B \wedge x \neq y \rightarrow x$与$y$不可比 $)$

  $|B|$称为反链的长度

链, 反链(举例)

- 设偏序集$<A,\preccurlyeq>$如图所示, $A=\{a,b,\ldots,k\}$.



$B_1=\{a,c,d,e\}$是长为4的链

上界{e,f,g,h}, 上确界{e}

下界{a}, 下确界{a}

$B_2=\{a,e,h\}$是长为3的链

$B_3=\{b,g\}$是长为2的链

$B_4=\{g,h,k\}$是长为3的反链

上界,下界,上确界,下确界: 无

$B_5=\{a\}$是长为1的链和反链

$B_6=\{a,b,g,h\}$既非链,亦非反链

定理2.31

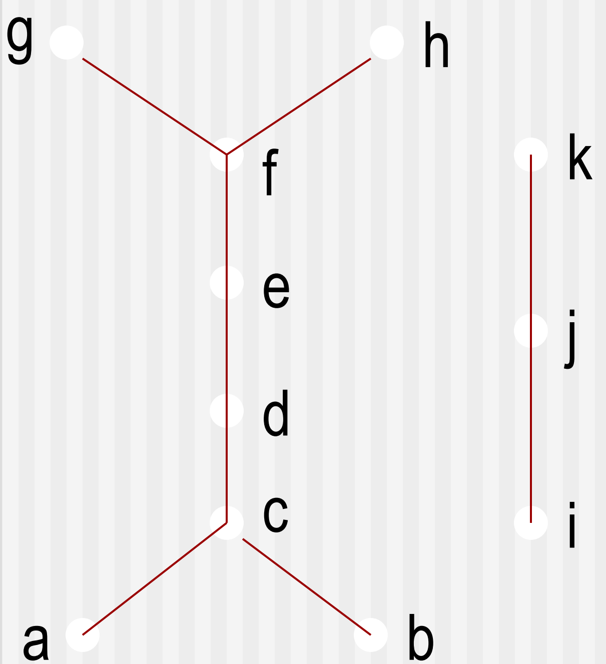
- 定理2.31: 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, A中最长链的长度为n, 则

  (1) A中存在极大元

  (2) A存在n个划分块的划分, 每个划分块都是反链(即A划分成n个互不相交的反链)

- 推论: 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, 若$|A|=mn+1$,则A中要么存在长度为$m+1$的反链, 要么存在长度为$n+1$的链.

举例



最长链长度为6, 如

B_1={a,c,d,e,f,h}, B_2={a,c,d,e,f,g},

A={a,b,…,k}可以划分为

$\mathcal{A}_1$= { {a,b,i}, {c,j}, {d}, {e}, {f}, {g,h,k} },

$\mathcal{A}_2$= { {a,b}, {c,i}, {d,j}, {e,k}, {f}, {g,h} }

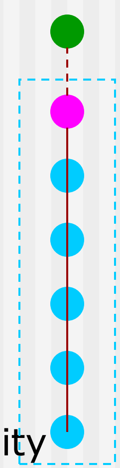
$|A|=11=2\times5+1$,

A中既有长度为2+1=3的反链,

也有长度为5+1=6的链

定理2.31(证明(1))

- 定理2.31: 设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$为偏序集, A中最长链的长度为n, 则 (1) A中存在极大元
- 证明: (1) 设B是A中长度为n的最长链, B有极大元(也是最大元)y, 则y也是A的极大元, 否则A中还有比y“大”的元素z, B就不是最长链.



定理2.31(证明(2))

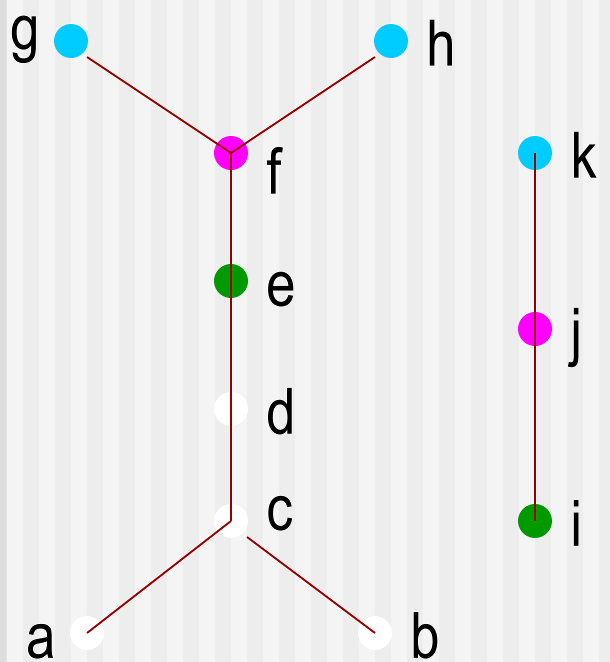
- 定理2.31: 设<A,≼>为偏序集, A中最长链的长度为n, 则(2) A存在n个划分块的划分, 每个划分块都是反链(即A划分成n个互不相交的反链)
- 证明: (2) A_1 = { x | x是A中的极大元 },

  A_2 = { x | x是$(A-A_1)$中的极大元 },…

  A_n = { x | x是$(A-A_1-\ldots-A_{n-1})$中的极大元 },

  则 $\mathcal{A}$ = { $A_1, A_2,\ldots, A_n$ }是满足要求的划分.

定理31(证明(2):举例)



最长链长度为6,

$A_1 = \{ g, h, k \}$,

$A_2 = \{ f, j \}$,

$A_3 = \{ e, i \}$,

$A_4 = \{ d \}$,

$A_5 = \{ c \}$,

$A_6 = \{ a, b \}$,

$\mathcal{A} = \{ \{a,b\}, \{c\}, \{d\}, \{e,i\}, \{f,j\}, \{g,h,k\} \}$

定理2.31(证明(2)续)

- 证明(续): [1] $A_1 = \{ x \mid x$是A中的极大元 $\}$, 极大元互相之间不可比, 所以A_1是反链, 同理$A_2,\ldots,A_n$都是反链.

  [2] 显然$A_1,A_2,\ldots,A_n$互不相交.

  [3] 最长链上的元素分属$A_1,A_2,\ldots,A_n$, 所以$A_1,A_2,\ldots,A_n$都非空.

  [4] 假设$z\in A-A_1-\ldots-A_n$,则最长链上的元素加上z就是长度为n+1的链, 矛盾! 所以$A=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$.

综上所述, $\mathcal{A}=\{ A_1,A_2,\ldots,A_n \}$确是所求划分. #

定理31推论(证明)

- 推论：设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集，若$|A|=mn+1$,则A中要么存在长度为$m+1$的反链，要么存在长度为$n+1$的链.
- 证明：(反证)假设A中既没有长度为$m+1$的反链，也没有长度为$n+1$的链，则按照定理2.31(2)中要求来划分A，A至多划分成n块，每块至多m个元素，于是A中至多有mn个元素，这与$|A|=mn+1$矛盾！
#

良序(well-order)

- 良序关系: 设<A, $\prec$>为拟全序集, 若A的任何非空子集B均有最小元, 则称$\prec$为良序关系, <A, $\prec$ >为良序集
- 例: <N, $\prec$ >是良序集, <Z, $\prec$ >不是良序集

设 Σ 为一字母表，<Σ,≤>为一良序集，那么Σ^*上的关系$\leq_{字}$称为Σ^*上的字典序（lexicographically ordered relation），定义如下：对任意x，y∈Σ*

$$x \leq_{字} y 当且仅当(x为y字头) \vee (x = w\xi w' \wedge y = w\zeta w'' \wedge \xi \neq \zeta \wedge \xi \leq \zeta)$$

$$(\xi, \zeta \in \Sigma, w, w', w'' \in \Sigma^*)$$

设Σ为一字母表，<Σ,≤>为一良序集，那么Σ^*上的关系$\leq_{标}$称为Σ^*上的标准序（normally ordered relation），定义如下：对任意x，y∈Σ^*，$x \leq_{标} y$当且仅当$||x||<||y|| \vee (||x||=||y|| \wedge x \leq_{字} y)$（$||w||$表示字w的字长）

例 设Σ = {a,b}，λ≤a≤b，那么

（1）依字典序排列Σ*如下：

λ ,a,aa,aaa, … , aab,aaab,ab,… , b,ba,baa, baaa， …

（2）依标准序排列如下：

λ ,a,b,aa,ab,ba,bb,aaa,aab,aba,abb,baa,bab,bba,bbb,…

小结

- 拟序关系
- 最大元，最小元，极大元，极小元
- 上界，下界，最小上界，最大下界
- 链，反链
- 良序关系

作业

- P56: **45, 47, 49, 52**