- 2.6 关系闭包(closure)
- 2.7 等价关系

2.6 关系的闭包

- 自反闭包r(R)
- 对称闭包s(R)
- 传递闭包t(R)
- 闭包的性质, 求法, 相互关系

什么是闭包?

- 闭包(closure): 包含所有给定对象，并且具有指定性质的最小集合
- “最小”： 任何包含同样对象，具有同样性质的集合，都包含这个闭包集合

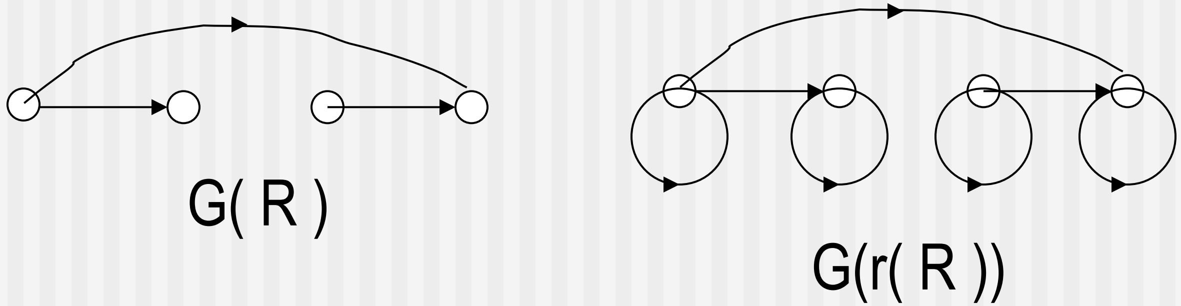
自反闭包(reflexive closure)

- 自反闭包: 包含给定关系R的最小自反关系, 称为R的自反闭包, 记作r(R).

  (1) $R \subseteq r(R)$;

  (2) r(R)是自反的;

  (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$自反$) \rightarrow r(R) \subseteq S)$.



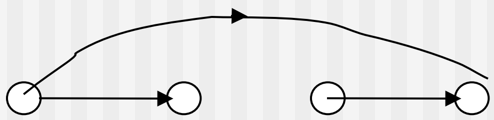
对称闭包(symmetric closure)

- 对称闭包: 包含给定关系R的最小对称关系, 称为R的对称闭包, 记作s(R).

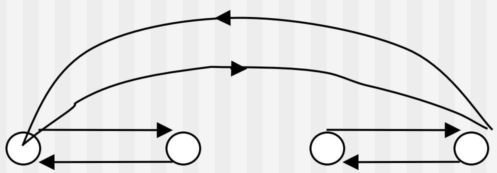
  (1) $R \subseteq s(R)$;

  (2) s(R)是对称的;

  (3) $\forall S(\ (R \subseteq S \wedge S$对称$) \to s(R) \subseteq S\ )$.



G(R)



G(s(R))

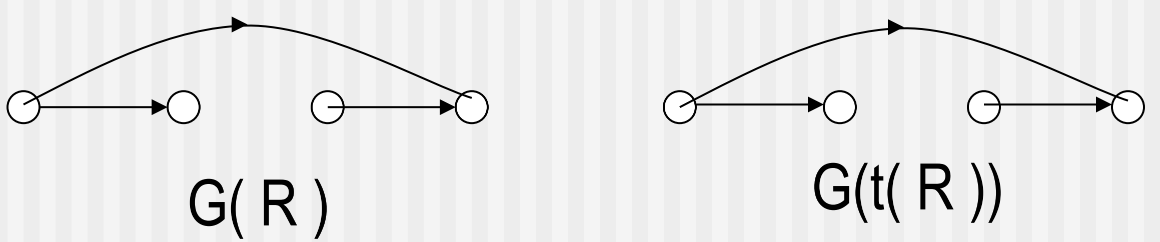
传递闭包(transitive closure)

- 传递闭包: 包含给定关系R的最小传递关系, 称为R的传递闭包, 记作t(R).

  (1) $R \subseteq t(R)$;

  (2) t(R)是传递的;

  (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S\text{传递}) \rightarrow t(R) \subseteq S)$.



定理2.19

- 定理2.19: 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$,则

(1) R自反 $\Leftrightarrow r(R) = R$;

(2) R对称 $\Leftrightarrow s(R) = R$;

(3) R传递 $\Leftrightarrow t(R) = R$;

证明: (1) $R \subseteq R \wedge R$自反 $\Rightarrow r(R) \subseteq R$

又 $R \subseteq r(R)$, $\therefore r(R) = R$.

(2)(3) 完全类似. #

定理2.20(单调性)

- 定理2.20: 设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$;

定理2.20(1)的证明

设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

证明:任意$<x,y> \in r(R_1)$

(1) $x=y$, $<x,y>=<x,x> \in r(R_2)$

(2) $x \neq y$, $<x,y> \in r(R_1)$

$\Rightarrow <x,y> \in R_1$

$\Rightarrow <x,y> \in R_2$

$\Rightarrow <x,y> \in r(R_2)$

$\therefore r(R_1) \subseteq r(R_2)$#

定理2.20(2)的证明

设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则 $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

证明:任意 $<x,y> \in s(R_1)$

(1) $<x,y> \in R_1$,

$<x,y> \in R_1 \Rightarrow <x,y> \in R_2 \Rightarrow <x,y> \in s(R_2)$;

(2) $<x,y> \notin R_1$,

$<x,y> \notin R_1 \Rightarrow <y,x> \in R_1 \Rightarrow <y,x> \in R_2$

$\Rightarrow <x,y> \in s(R_2)$

$\therefore s(R_1) \subseteq s(R_2)$ #

定理2.20(3)的证明

设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \emptyset$, 则 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明:任意$<x,y> \in t(R_1)$

(1) $<x,y> \in R_1$,

$<x,y> \in R_1 \Rightarrow <x,y> \in R_2 \Rightarrow <x,y> \in t(R_2)$;

(2) $<x,y> \notin R_1$,

$<x,y> \notin R_1$

$\Rightarrow <x,t_1> \in R_1 \wedge <t_1,t_2> \in R_1 \ldots \wedge <t_r,y> \in R_1$

$\Rightarrow <x,t_1> \in R_2 \wedge <t_1,t_2> \in R_2 \ldots \wedge <t_r,y> \in R_2$

$\Rightarrow <x,y> \in t(R_2)$

$\therefore t(R_1) \subseteq t(R_2)$ #

定理2.21(闭包在并运算上的分配律)

- 定理2.21: 设 $R_1,R_2\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) $r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$;

(2) $s(R_1\cup R_2) = s(R_1)\cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1\cup R_2) \supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

证明: (1) 利用定理2.20, $r(R_1\cup R_2)\supseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

$r(R_1)\cup r(R_2)$自反且包含$R_1\cup R_2$,所以

$r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

$\therefore\ r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$ #

定理2.21(证明(2))

- (2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$;
- 证明: 利用定理2.20,

  $s(R_1 \cup R_2) \supseteq s(R_1) \cup s(R_2)$.

  $s(R_1) \cup s(R_2)$对称且包含$R_1 \cup R_2$,所以

  $s(R_1 \cup R_2) \subseteq s(R_1) \cup s(R_2)$.

  $\therefore\ s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$ #

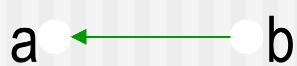
定理2.21(证明(3))

- (3) $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$.
- 证明：利用定理2.20,

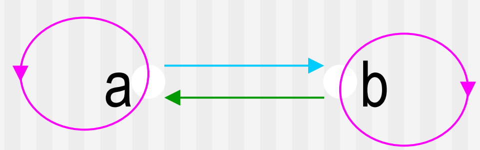
$$t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2).$$

注意：$t(R_1) \cup t(R_2)$不一定传递． #

$G(R_1) = G(t(R_1))$



$G(R_2) = G(t(R_2))$



$G(t(R_1 \cup R_2))$

闭包的求法

- 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

定理2.22 (1) $r(R) = R \cup I_A$;

定理2.23 (2) $s(R) = R \cup R^{-1}$;

定理2.24 (3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

  - R自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

    R对称 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

    R传递 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

定理2.22

- 定理2.22: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则
$$r(R) = R \cup I_A;$$
- 证明: $R \cup I_A$是自反的;

$I_A \subseteq R \cup I_A \Leftrightarrow R \cup I_A$自反 $\Rightarrow r(R) \subseteq R \cup I_A$;

$R \subseteq r(R) \wedge I_A \subseteq r(R) \Rightarrow R \cup I_A \subseteq r(R)$;

$\therefore r(R) = R \cup I_A$.

定理2.23

- 定理2.23: 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

$$s(R) = R\cup R^{-1};$$

- 证明:

(1) $(R\cup R^{-1})^{-1}=R\cup R^{-1} \Leftrightarrow R\cup R^{-1}$对称,并且 $R \subseteq R\cup R^{-1} \Rightarrow s(R)\subseteq R\cup R^{-1}$;

(2) $R\subseteq s(R) \wedge s(R)$对称

$\Rightarrow R\subseteq s(R) \wedge R^{-1}\subseteq s(R) \Rightarrow R\cup R^{-1}\subseteq s(R)$

$\therefore\ s(R) = R\cup R^{-1}$.

定理2.24

- 定理24: 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

$$t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots;$$

- 证明: (1)证明$R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$是传递的

$\forall x,y,z\in A$, $<x,y>\in R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots \wedge <y,z>\in R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

$\Rightarrow\exists s(<x,y>\in R^s)\wedge \exists t(<y,z>\in R^t)$

$\Rightarrow<x,z> \in R^t\circ R^s \Rightarrow<x,z>\in R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

所以 $t(R)\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots;$

(2) $R^n\subseteq t(R)$(用归纳法证明)

$\Rightarrow R\subseteq t(R)\wedge R^2\subseteq t(R)\wedge R^3\subseteq t(R)\wedge\ldots$

$\Rightarrow R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots \subseteq t(R)$

$\therefore t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

定理2.24的推论

- 推论: 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $0<|A|<\infty$, 则$\exists \ell\in N$, 使得 $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^\ell$;
- 证明: 由定理16知 $\exists s,t\in N$, 使得 $R^s = R^t$.

由定理2.18知 $R,R^2,R^3,\ldots\in\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$.

取ℓ=t-1, 由定理24知

$$t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots.$$

$$= R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^\ell$$

$$\therefore\ t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^\ell.$$ #

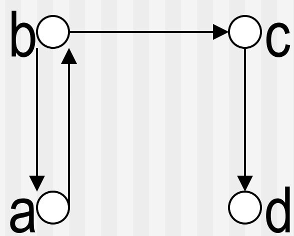
例2.8

例2.8: 设 A = { a,b,c,d },

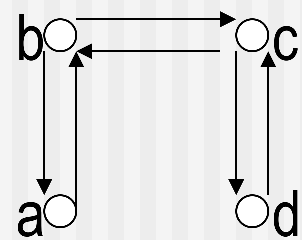
R ={ <a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d> }.

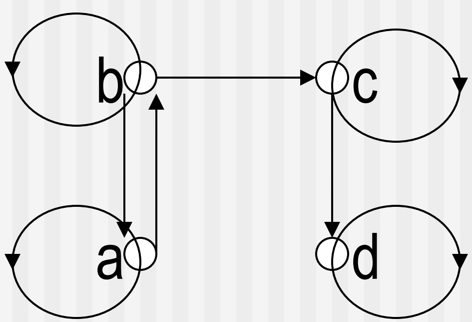
求 r(R), s(R), t(R).

解:



$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$



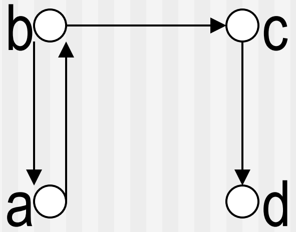


$$M(r(R))=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

$$M(s(R))=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

例2.8(续)

解：



$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

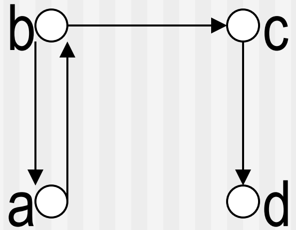
$$M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M(R^2).$$

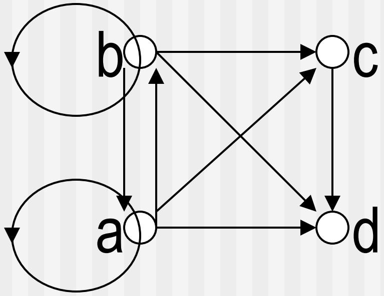
例8(续)

- 解:



$$M(t(R)) = M(R) \vee M(R^2) \vee M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

#



闭包运算是否保持关系性质?

(1) R自反 $\Rightarrow$ s(R), t(R)自反 ?

(2) R对称 $\Rightarrow$ r(R), t(R)对称 ?

(3) R传递 $\Rightarrow$ s(R), r(R)传递 ?

定理2.25

- 定理2.25: 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$,则

(1) R自反 $\Rightarrow$ s(R)和t(R)自反;

(2) R对称 $\Rightarrow$ r(R)和t(R)对称;

(3) R传递 $\Rightarrow$ r(R)传递;

证明: (1) $I_A \subseteq R \cup R^{-1} = s(R)$

$\therefore$ s(R)自反.

$I_A \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = t(R)$

$\therefore$ t(R)自反. #

定理2.25(证明(2))

- (2) R对称 $\Rightarrow$ r(R)和t(R)对称;
- 证明: (2) $r(R)^{-1} = (I_A \cup R)^{-1} = I_A^{-1} \cup R^{-1}$

$= I_A \cup R^{-1} = I_A \cup R = r(R)$ $\therefore$ r(R)对称.

$t(R)^{-1} = (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)^{-1}$

$= R^{-1} \cup (R^2)^{-1} \cup (R^3)^{-1} \cup \ldots$

$= R^{-1} \cup (R^{-1})^2 \cup (R^{-1})^3 \cup \ldots$ ($(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$)

$= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = t(R)$, $\therefore$ t(R)对称.

定理2.25(证明(3))

- (2) R传递 $\Rightarrow$ r(R)传递;
- 证明: (2) $r(R)\circ r(R) = (I_A \cup R)\circ(I_A \cup R)$

$= (I_A \circ I_A)\cup(I_A \circ R)\cup(R\circ I_A)\cup(R\circ R)$

$\subseteq I_A \cup R \cup R \cup R = I_A \cup R = r(R)$

$\therefore$ r(R)传递.　　#

- 反例: R传递, 但是s(R)非传递.

G(R)

G(s(R))

	自反性	对称性	传递性
r(R)	√ (定义)	√(2)	√(3)
s(R)	√(1)	√(定义)	×
t(R)	√(1)	√(2)	√(定义)

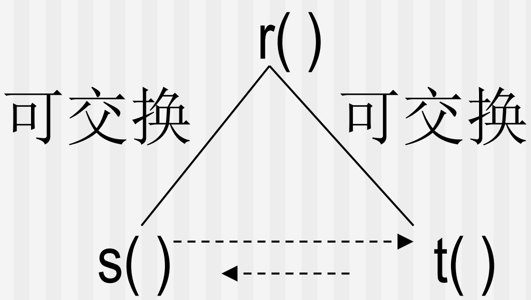
定理2.26

- 定理2.26: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$;



定理2.26(证明(1))

- (1) $rs(R) = sr(R)$;

证明: (1) $rs(R) = r(s(R)) = r(R \cup R^{-1})$

$= I_A \cup (R \cup R^{-1}) = (I_A \cup R) \cup (I_A^{-1} \cup R^{-1})$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^{-1} = r(R) \cup r(R)^{-1}$

$= s(r(R)) = sr(R)$.

$\therefore$ $rs(R) = sr(R)$. #

定理2.26(证明(2))

- (2) $rt(R) = tr(R)$;

证明:(2) $rt(R) = r(t(R)) = r(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)$

$= I_A \cup (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R \cup R^2) \cup (I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3) \cup \ldots$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^2 \cup (I_A \cup R)^3 \cup \ldots$

$= r(R) \cup r(R)^2 \cup r(R)^3 \cup \ldots = t(r(R))$.

$\therefore \quad rt(R) = tr(R)$. #

定理2.26(证明(3))

- (3) $st(R) \subseteq ts(R)$;

证明:(3) $R \subseteq s(R)$

$$\Rightarrow st(R) \subseteq st(s(R))$$

$$= sts(R) = s(ts(R))$$

(s(R)对称，由定理2.25(2)得ts(R)对称)

$$s(ts(R)) = ts(R)$$

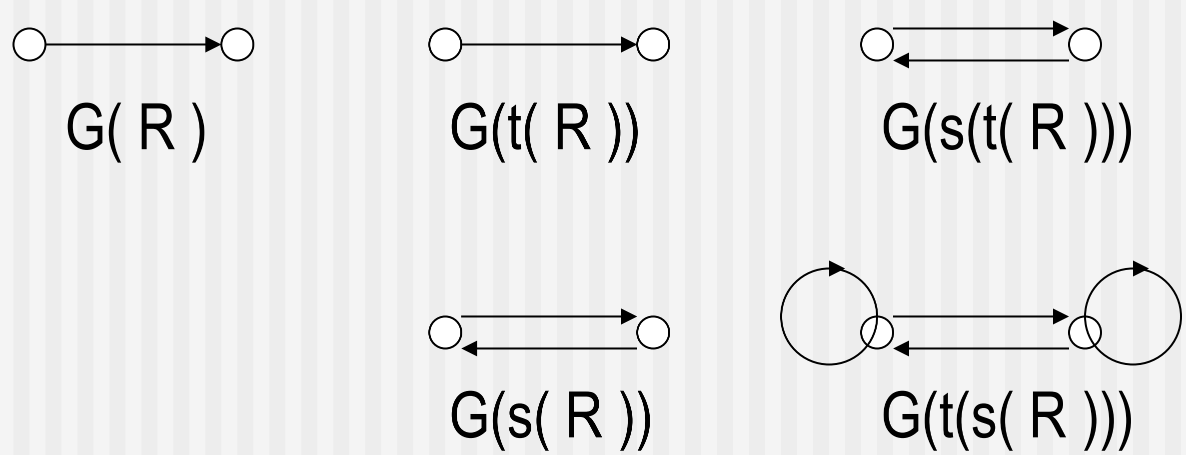
(由定理2.19得)

$$\therefore st(R) \subseteq ts(R). \quad \#$$

定理2.26(3)

- (3)

例： $st(R) \subset ts(R)$



2.7 等价关系和划分

- 等价关系,等价类,商集
- 划分, 第二类Stirling数, 加细

等价(equivalence)关系定义

- **等价关系**: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 若R是自反的, 对称的, 传递的,则称R为等价关系

举例

- 例2.9: 判断是否等价关系(A是某班学生):

R_1={<x,y>|x,y∈A∧x与y同年生}

R_2={<x,y>|x,y∈A∧x与y同姓}

R_3={<x,y>|x,y∈A∧x的年龄不比y小}

R_4={<x,y>|x,y∈A∧x与y选修同门课程}

R_5={<x,y>|x,y∈A∧x的体重比y重}

解：R1: 自反性、对称性、传递性 （等价关系）

R2: 自反性、对称性、传递性 （等价关系）

R3: 自反性、无对称性、传递性

R4: 自反性、对称性、无传递性

R5: 无自反性、无对称性、传递性

例2.10

- 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 对R依次求三种闭包共有6种不同顺序, 其中哪些顺序一定导致等价关系?

  rst(R), rts(R), str(R), srt(R), trs(R), tsr(R)=t(s(r(R)))

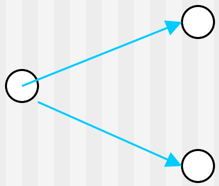
- 解: $st(R)\subseteq ts(R)$, $sr(R)=rs(R)$, $tr(R)=rt(R)$,

tsr(R)=trs(R)=rts(R) (是否对称?)

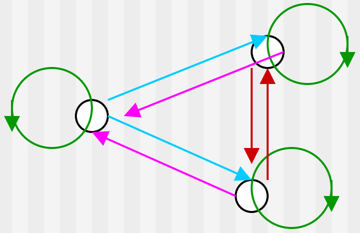
str(R)=srt(R)=rst(R) (是否传递?)

tsr(R)=trs(R)=rts(R) (等价关系)

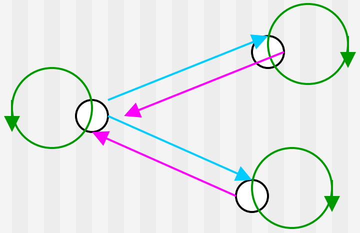
str(R)=srt(R)=rst(R) (无传递性) ×



G(R)



G(tsr(R))



G(str(R))

等价类(equivalence class)

定义2.15:等价类 设R是$A \neq \varnothing$上等价关系,$\forall x \in A$,令 $[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$,称$[x]_R$为x关于R的等价类,简称x的等价类,简记为[x].

定理2.27等价类性质

- 定理27:设R是$A\neq\varnothing$上等价关系,$\forall x,y\in A$,

(1) $[x]_R\neq\varnothing$

(2) $xRy \Rightarrow [x]_R=[y]_R$;

(3) $\neg xRy \Rightarrow [x]_R\cap[y]_R=\varnothing$;

(4) $\cup\{ [x]_R \mid x\in A \} =A$.

- 证明: (1) R自反 $\Rightarrow xRx\Rightarrow x\in[x]_R\Rightarrow[x]_R\neq\varnothing$.

定理2.27(证明(2))

(2) $xRy \Rightarrow [x]_R=[y]_R$;

证明:

只需证明$[x]_R\subseteq[y]_R$和$[x]_R\supseteq[y]_R$.

($\subseteq$) $\forall z$, $z\in[x]_R\wedge xRy \Rightarrow zRx\wedge xRy$

$\Rightarrow zRy \Rightarrow z\in[y]_R$. $\therefore$ $[x]_R\subseteq[y]_R$.

($\supseteq$) 同理可证.   #

定理2.27(证明(3))

(3) $\neg xRy \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \varnothing$;

证明: (3) (反证) 假设$\exists z$, $z \in [x]_R \cap [y]_R$, 则

$z \in [x]_R \cap [y]_R \Rightarrow zRx \wedge zRy \Rightarrow xRz \wedge zRy$

$\Rightarrow xRy$, 这与$\neg xRy$矛盾!

$\therefore [x]_R \cap [y]_R = \varnothing$. #

定理2.27(证明(4))

- (4) $\cup\{ [x]_R \mid x\in A \} = A$.
- 证明: $A=\cup\{ \{x\} \mid x\in A \}$

  $\subseteq \cup\{ [x]_R \mid x\in A \}$

  $\subseteq \cup\{ A \mid x\in A \}=A$.

  $\therefore \cup\{ [x]_R \mid x\in A \} = A$. #

例2.11

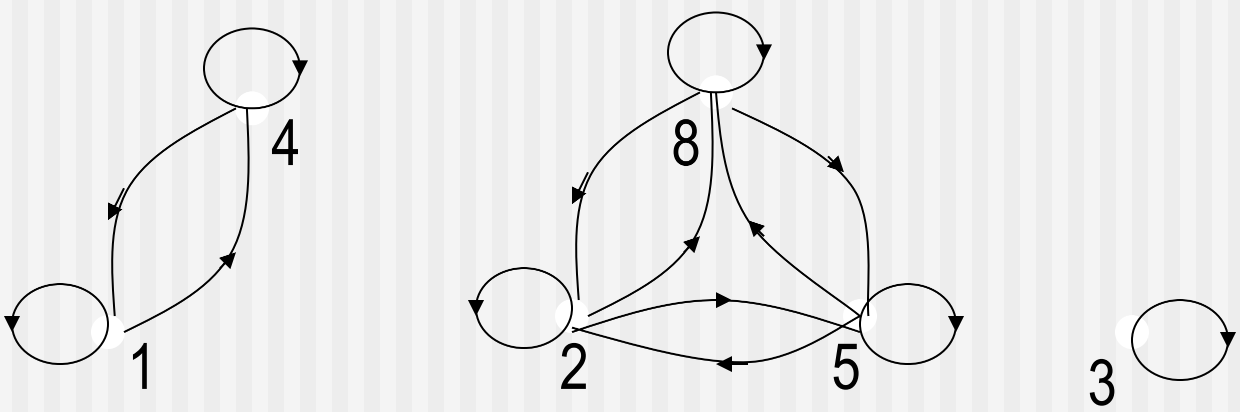
- 例11: 设 $A=\{1,2,3,4,5,8\}$, 求

  $R_3 = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3) \}$

的等价类, 画出R_3的关系图.

- 解: $[1]=[4]=\{1,4\}$, $[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$,

  $[3]=\{3\}$.   #



同余关系: 设$n \in \{2,3,4,\ldots\}$, $x,y \in Z$,

x与y模n同余(be congruent modulo n)

$\Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow n|(x-y) \Leftrightarrow x-y=kn\ (k \in Z)$

同余关系是等价关系

商集(quotient set)

- 商集: 设R是非空集合A≠∅上等价关系, 以关于R的全体不同的等价类为元素的集合

$$A/R = \{ [x]_R \mid x\in A \}$$

称为A关于R的商集, 简称A的商集.

由定理2.27,

A/R的任二元素是不交的,且∪ A/R = A.

- 例11: $A/R_3 =\{ \{1,4\}, \{2,5,8\}, \{3\} \}$.

例2.12(1)

- 设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, I_A, E_A,
  $$R_{ij}=I_A\cup\{<a_i,a_j>,<a_j,a_i>\}$$
都是A上等价关系，求对应的商集, 其中$a_i,a_j\in A$, $i\neq j$. $\varnothing$是A上等价关系吗?

解: $A/I_A=\{\ \{a_1\}, \{a_2\},\ldots, \{a_n\}\ \}$

$A/E_A=\{\ \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\ \}$

$A/R_{ij}= A/I_A\cup\{\{a_i,a_j\}\} - \{\{a_i\},\{a_j\}\}$.

$\varnothing$不是A上等价关系(非自反). #

例2.12(2)

- A={a,b,c},求出A上的全体等价关系及其对应的商集

解：共有5种

$R_1=I_A, R_2=E_A, R_3=I_A \cup \{<b,c><c,b>\}$,

$R_4=I_A \cup \{<a,c><c,a>\}$,

$R_5=I_A \cup \{<a,b><b,a>\}$

商集: {{a},{b},{c}},

{{a,b,c}}, {{a},{b,c}},

{{a,c},{b}}, {{a,b},{c}}

2.7 等价关系和划分

- 等价关系,等价类,商集
- 划分, 第二类Stirling数, 加细

划分(partition)

- 划分: 设$A\neq\varnothing$, 若存在A的一个子集族$\mathcal{A}\subseteq P(A)$,若$\mathcal{A}$满足

  (1) $\varnothing\notin\mathcal{A}$;

  (2) $\forall x,y(\ x,y\in\mathcal{A} \wedge x\neq y \Rightarrow x\cap y=\varnothing\ )$

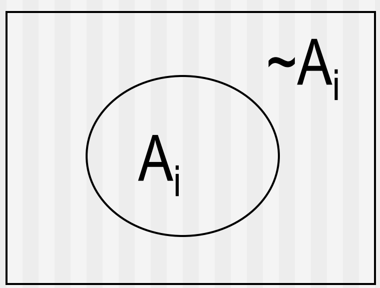
  (3) $\cup\mathcal{A} = A$

  则称$\mathcal{A}$为A的一个划分, $\mathcal{A}$中元素称为划分块(block).

划分(举例)

- 设 $\varnothing \neq A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$, 则以下都是划分:

$\mathcal{A}_i = \{A_i, \sim A_i\}$, ($i=1,2,\ldots,n$)

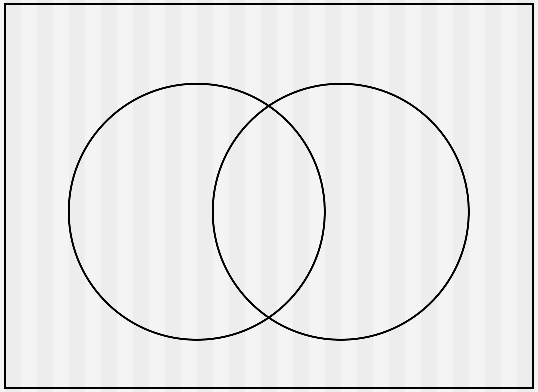


划分(举例)

- 设 $\varnothing \neq A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$, 则以下都是划分:

$\mathcal{A}_{ij} = \{A_i \cap A_j, \sim A_i \cap A_j, A_i \cap \sim A_j, \sim A_i \cap \sim A_j\} - \{\varnothing\}$

$(\ i,j = 1,2,\ldots,n \wedge i \neq j\ )$ ……

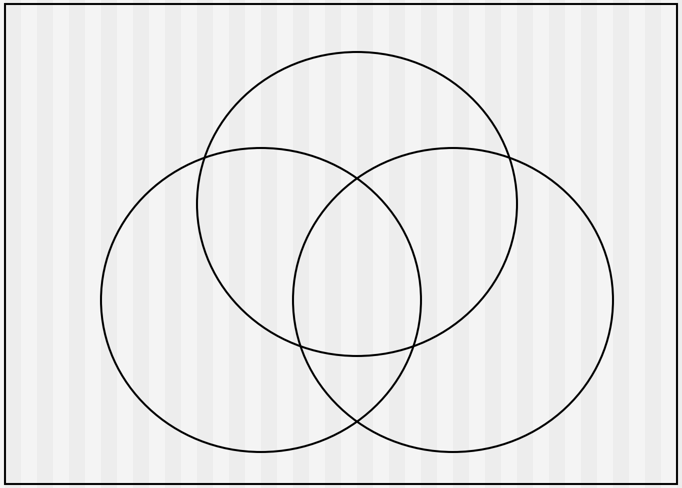


- 设 $\varnothing \neq A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$, 则以下都是划分:

$\mathcal{A}_{12\ldots n} = \{\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_n, \ldots,$

$\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_{n-1} \cap A_n, \ldots$

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\} - \{\varnothing\}$. #



等价关系与划分是一一对应的

- 定理2.28: 设$A\neq\varnothing$, 则

(1) R是A上等价关系 $\Rightarrow$ A/R是A的划分

(2) $\mathcal{A}$是A的划分 $\Rightarrow$ $R_{\mathcal{A}}$是A上等价关系,其中

$$xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \exists z(z\in\mathcal{A} \wedge x\in z \wedge y\in z)$$

$R_{\mathcal{A}}$称为由划分$\mathcal{A}$所定义的等价关系(同块关系). #

非空集合A上的等价关系与A的划分是一一对应的，所以A上有多少个不同的等价关系，就产生同样个数的不同的划分，反之亦然。

第二类Stirling数

第二类Stirling数(Stirling subset number):

把n个不同球放到k个相同盒子，要求无空盒，不同放法的总数$\left\{ n \atop k \right\}$,称为第二类Stirling数

- 把**n**元集划分成**k**个非空子集的分法总数

第二类Stirling数性质

1.

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0, \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1, \left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1, \left\{ {n \atop n-1} \right\} = C_n^2, \left\{ {n \atop n} \right\} = 1.$$

2. 递推公式:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}.$$

先把n-1个元素分成k个子集, 再加入第n个元素到其中之一

先把n-1个元素分成k-1个子集, 再让第n个元素自成一子集

第二类Stirling数表

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1,170	1,050	266	28	1	
9	0	1	255	3,035	7,770	6,951	2,646	462	36	1
10	0	1	511	9,330	34,501	42,525	22,827	5,880	750	45

例2.13

- 问A={a,b,c,d}上有多少种等价关系?
- 解:

$$B_4=\begin{Bmatrix}4\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\4\end{Bmatrix}=1+(2^3-1)+C_4^2+1=1+7+6+1=15.$$

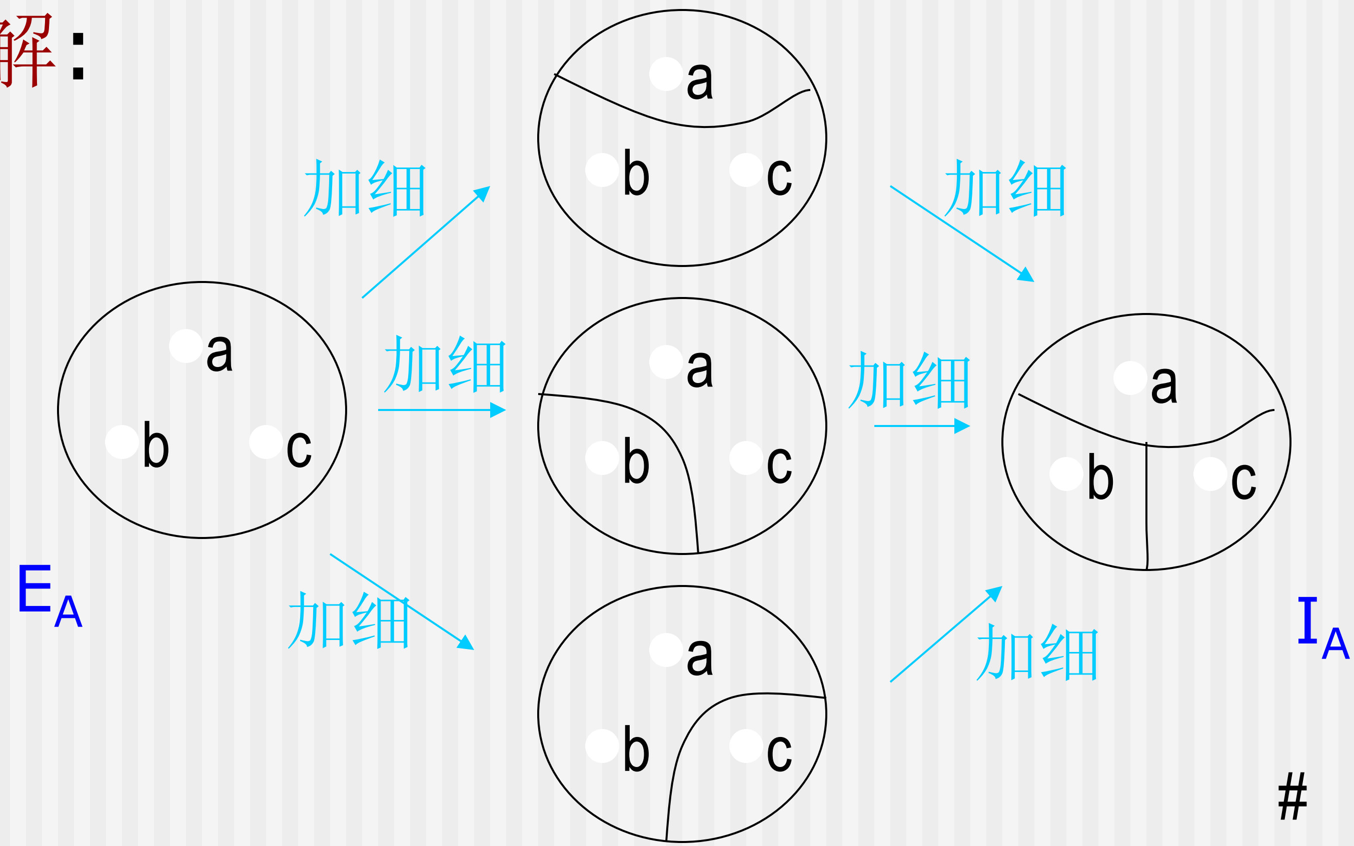
#

划分的加细(refinement)

- 划分的加细：设$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$都是集合A的划分，若$\mathcal{A}$的每个划分块都包含于$\mathcal{B}$的某个划分块中，则称$\mathcal{A}$为$\mathcal{B}$的加细.
- $\mathcal{A}$为$\mathcal{B}$的加细 $\Leftrightarrow$ $R_{\mathcal{A}} \subseteq R_{\mathcal{B}}$

例2.14

- 考虑A={a,b,c}上的划分之间的加细.
- 解:



#

小结

- 关系的闭包
- 等价关系

作业

- P55 :29, 31,
- 35, 37, 39