2.3 关系矩阵和关系图

1. 关系矩阵

2. 关系图

3. 集合

关系矩阵(matrix)

- **定义2.9** 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则R的关系矩阵 $M(R)=(r_{ij})_{n\times n}$, 其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & a_iRa_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

- 例如, A={a,b,c},

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$, 则

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

#

关系矩阵的性质

- R的集合表达式与R的关系矩阵可以唯一相互确定
- $M(R^{-1}) = (M(R))^T$.　　　(^{T}表示矩阵转置)
- $M(R_1 \circ R_2) = M(R_2) \bullet M(R_1)$.　　　($\bullet$表示矩阵“乘法”，其中加法使用逻辑加法$\vee$, 乘法使用逻辑乘法$\wedge$.)

例2.4

- 设 $A=\{a,b,c\}$, $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$, $R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,

用$M(R_1)$, $M(R_2)$确定$M(R_1^{-1})$, $M(R_2^{-2})$, $M(R_1 \circ R_1)$, $M(R_1 \circ R_2)$, $M(R_2 \circ R_1)$, 从而求出它们的集合表达式.

例题2.4(解)

- $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,
  $R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,
- 解:

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_1^{-1})=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad M(R_2^{-1})=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

$R_1^{-1} = \{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,b>\}$

$R_2^{-1} = \{<b,a>,<c,a>,<c,b>\}$

例题2.4(解)

- 解(续):

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_1\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$R_1 \bigcirc R_1$ = {<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>}.

例题2.4(解)

- 解(续): $M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

$$M(R_1\circ R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R_2\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$R_1 \bigcirc R_2$ = {<a,a>,<a,c>}.

$R_2 \bigcirc R_1$ = {<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>}.

#

关系图(graph)

- **定义2.10** 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则A中元素以“○”表示(称为顶点), R中元素以“→”表示(称为有向边); 若x_iRx_j, 则从顶点x_i向顶点x_j引有向边$<x_i,x_j>$, 这样得到的图称为R的关系图 $G(R)=<V,E>$,其中V表示顶点集合，E表示边集合。

关系图举例

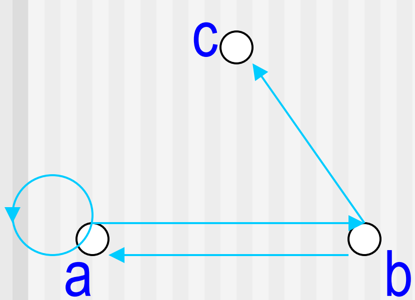
- 例如, A={a,b,c},

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,

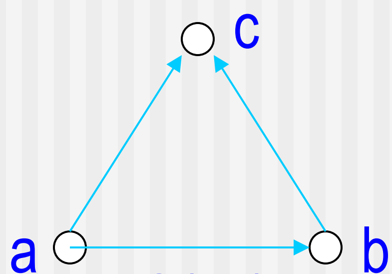
$R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,

$R_1^{-1} = \{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,b>\}$

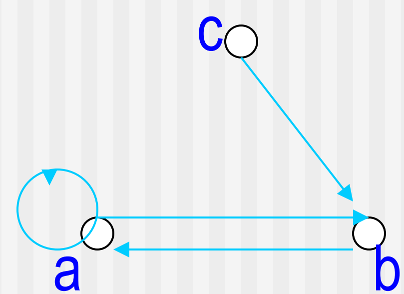
$R_2^{-1} = \{<b,a>,<c,a>,<c,b>\}$



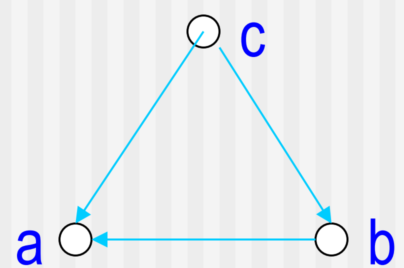
$G(R_1)$



$G(R_2)$



$G(R_1^{-1})$



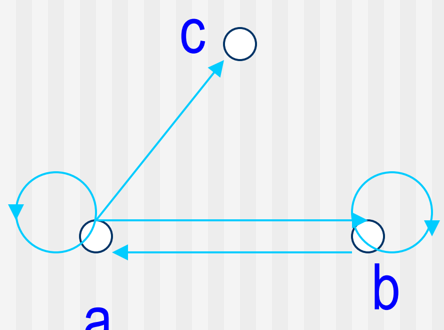
$G(R_2^{-1})$

关系图举例(续)

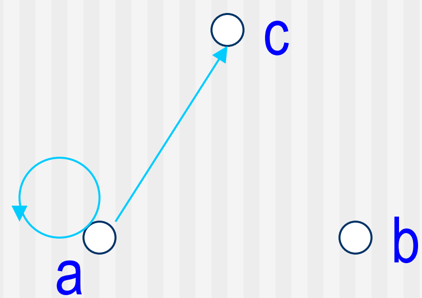
$R_1 \circ R_1 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}.$

$R_1 \circ R_2 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle\}.$

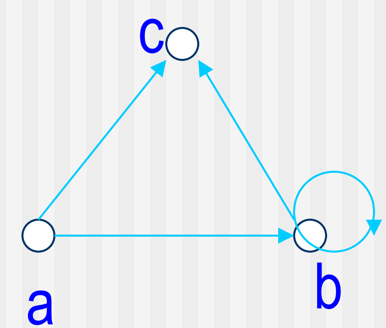
$R_2 \circ R_1 = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}.$



$G(R_1 \circ R_1)$



$G(R_1 \circ R_2)$



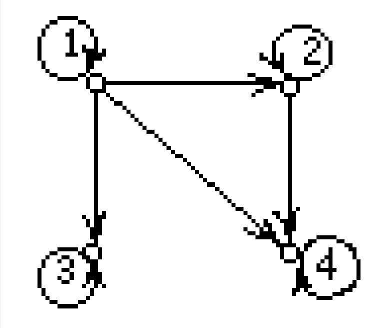
$G(R_2 \circ R_1)$

例 设A={1，2，3，4}，用集合表示法、关系矩阵和关系图给出A上的整除关系D_A。

解：$D_A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\text{整除}y\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$$M_{DA}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$



注意：

1) R的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可以唯一互相确定。集合表达式便于书写，关系矩阵便于存储，关系图直观清晰；

2) 对于$R\subseteq A\times B$, $|A|=n$,$|B|=m$,关系矩阵M(R)是$n\times m$阶的,关系图G(R)中的边都是从A中元素指向B中元素的.

2.4 关系的性质

- 自反性(reflexivity)
- 反自反性(irreflexivity)
- 对称性(symmetry)
- 反对称性(antisymmetry)
- 传递性(transitivity)

自反性(reflexivity)

设A为一集合, $R \subseteq A \times A$, 对于任意的$x \in A$,均有 xRx, 说R是A上自反的(reflexive)二元关系

$$\forall x(\ x \in A \rightarrow xRx\ ).$$

- R是非自反的 $\Leftrightarrow \exists x(\ x \in A \wedge \neg xRx)$

自反性

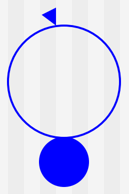
- 定理2.10: R是自反的

  $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

  $\Leftrightarrow R^{-1}$是自反的

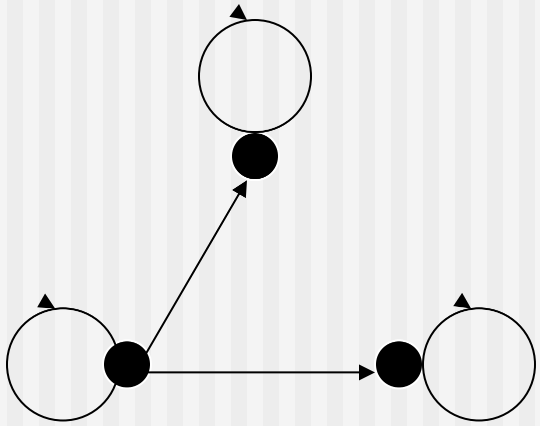
  $\Leftrightarrow M(R)$主对角线上的元素全为1

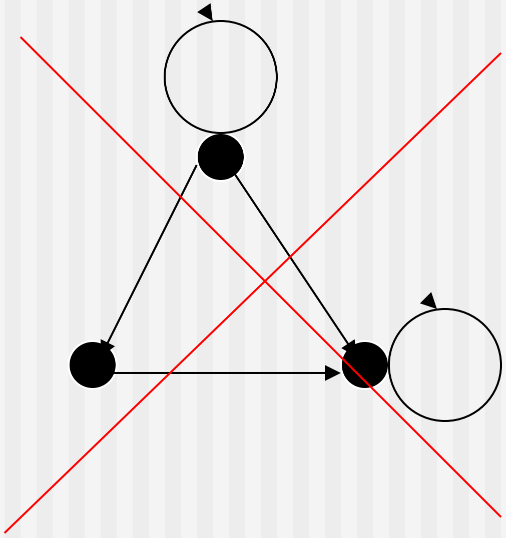
  $\Leftrightarrow G(R)$的每个顶点处均有环. #



自反性(举例)

例如，集合A上的全域关系E_A、恒等关系I_A、小于等于关系L_A、整除关系D_A都是A上的自反关系；包含关系($R_\subseteq$)、平面几何中的全等和相似关系也是自反关系。





反自反性(irreflexivity)

- 设A为一集合, $R\subseteq A\times A$, 对于任意的$x\in A$,均有$<x,x>\notin R$, 则R是A上反自反的(irreflexive)二元关系

$$\forall x(x\in A\to \neg xRx).$$

- R是非反自反的 $\Leftrightarrow \exists x(\ x\in A \wedge xRx)$

反自反性

- 定理2.11: R是反自反的

  $\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$

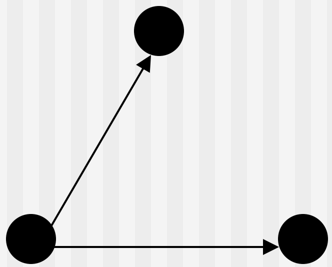
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反自反的

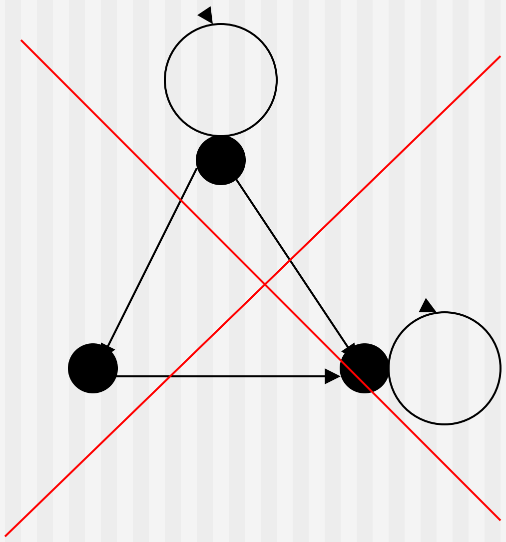
  $\Leftrightarrow M(R)$主对角线上的元素全为0

  $\Leftrightarrow G(R)$的每个顶点处均无环. #

反自反性(举例)

小于关系和真包含关系是反自反关系。





例 设A={1, 2, 3}，R_1， R_2， R_3, 是A上的关系，其中

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$

说明R_1， R_2， R_3, 是否为A上的自反关系和反自反关系.

解：**R_2**是自反的。

R_3是反自反的。

R_1既不是自反的，因为它不包含**<3,3>**；也不是反自反的，因为它包含了**<1,1>,<2,2>**。 #

既是自反的又是反自反的？ ∅上的空关系

对称性(symmetry)

- 对于任意的x,y∈A,若xRy,yRx,则称R为A上对称的(symmetric)二元关系

$$\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx).$$

- R非对称 $\Leftrightarrow \exists x \exists y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge \neg yRx)$

对称性

- 定理2.12: R是对称的

  $\Leftrightarrow R^{-1}=R$

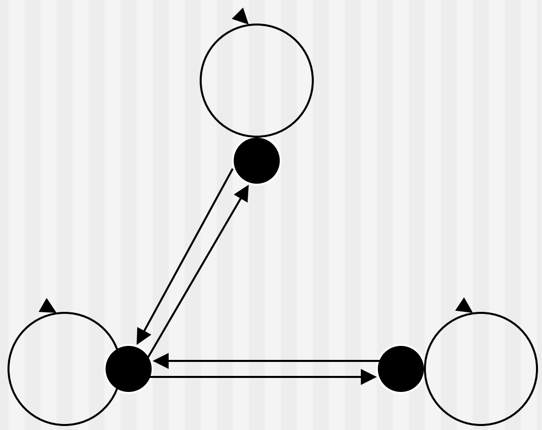
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是对称的

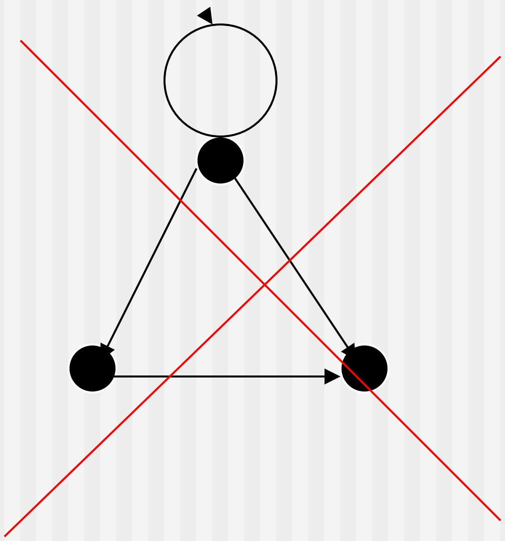
  $\Leftrightarrow M(R)$是对称的

  $\Leftrightarrow G(R)$的任何两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的有向边. #

对称性(举例)

- 恒等关系I_A、全域关系E_A是A上的对称关系。
- 同学关系、几何中的相似关系是对称关系。





反对称性(antisymmetry)

- 设$R\subseteq A\times A$, 说R是反对称的(antisymmetric),若
  $\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx\rightarrow x=y)$
- R非反对称
  $\Leftrightarrow\exists x\exists y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx\wedge x\neq y)$

反对称性

- 定理2.13：R是反对称的

  $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq I_A$

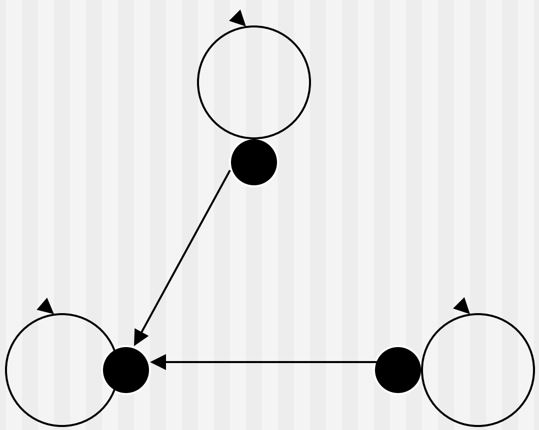
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反对称的

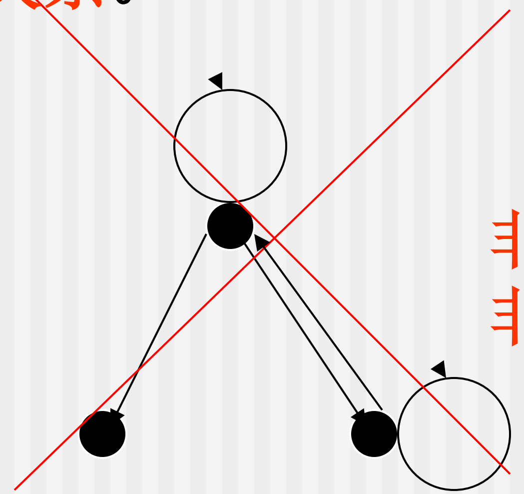
  $\Leftrightarrow$ 在M(R)中，$\forall i \forall j (i \neq j \wedge r_{ij}=1 \rightarrow r_{ji}=0)$

  $\Leftrightarrow$ 在G(R)中，$\forall x_i \forall x_j (i \neq j)$，若有有向边 $<x_i,x_j>$，则必没有 $<x_j,x_i>$. #

反对称性(举例)

小于等于(≤)关系是反对称关系。

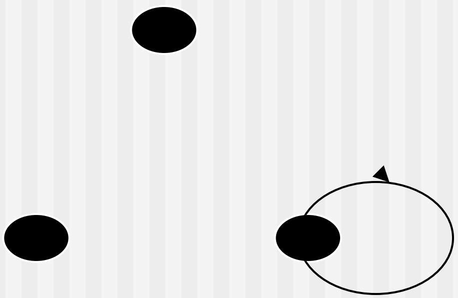




非反对称关系
非对称关系

对称且反对称关系　？

对称且反对称？



传递性(transitivity)

- 设A为一集合, $R \subseteq A \times A$, 对于任意的$x,y,z \in A$,若xRy且yRz, 则xRz,则称R为A上传递的(transitive)二元关系

  $\forall x \forall y \forall z(x \in A \land y \in A \land z \in A \land xRy \land yRz \rightarrow xRz)$.
- R非传递$\Leftrightarrow$

  $\exists x \exists y \exists z(x \in A \land y \in A \land z \in A \land xRy \land yRz \land \neg xRz)$

- 定理14： R是传递的

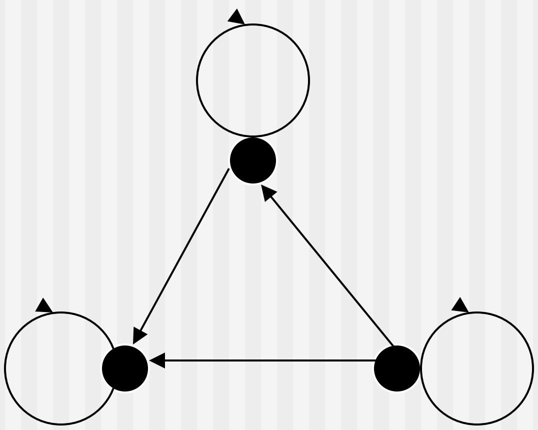
$\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

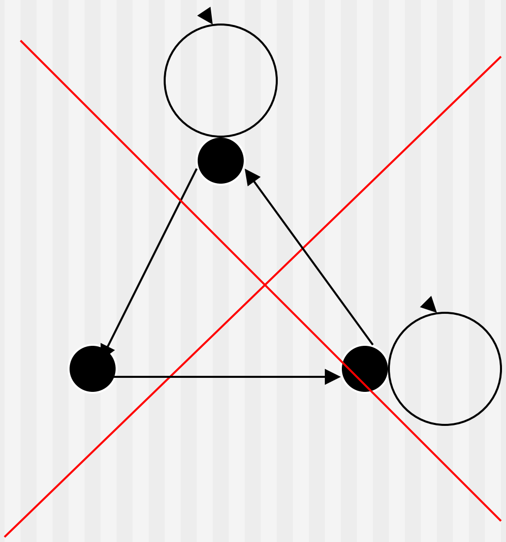
$\Leftrightarrow$ 在 $M(R \circ R)$ 中， $\forall i \forall j$， 若 $r_{ij}' = 1$, 则 $M(R)$中相应的元素$r_{ij} = 1$.

$\Leftrightarrow$ 在$G(R)$中, $\forall x_i \forall x_j \forall x_k$, 若有有向边$<x_i, x_j>, <x_j, x_k>$, 则必有有向边$<x_i, x_k>$. #

传递性(举例)

例如，A上的全域关系、恒等关系和空关系都是A上的传递关系。小于关系，小于等于关系、整除关系、包含关系和真包含关系也是相应集合上的传递关系。





举例

- 在 $N = \{0,1,2,\ldots\}$ 上:
- $\leq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$自反,反对称,传递
- $\geq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$自反,反对称,传递
- $<=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$反自反,反对称,传递
- $>=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x>y\}$反自反,反对称,传递
- $|=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x|y\}$反对称,传递,? ($\neg 0|0$)
- $I_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x=y\}$自反,对称,反对称,传递
- $E_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\}=N\times N$自反,对称,传递. #

例2.5

- $A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$,

$R_2=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$,

$R_3=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$,

$R_4=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$,

$R_5=\{<a,a>,<a,b>,<b,b>,<c,c>\}$,

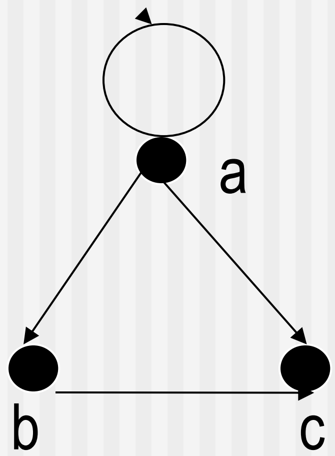
$R_6=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<a,a>\}$,

讨论以上各关系的性质

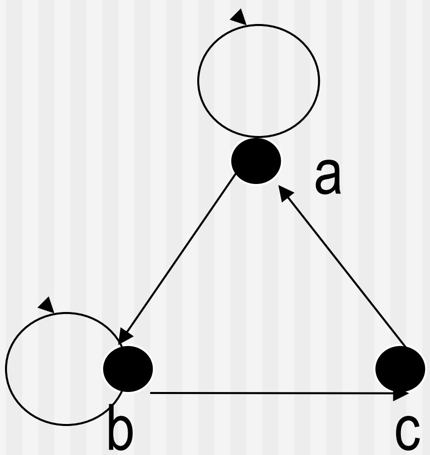
例2.5(续)

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$反对称,传递

$R_2=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$反对称



$G(R_1)$

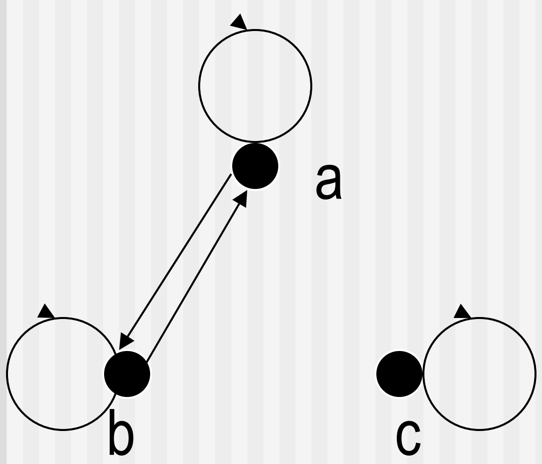


$G(R_2)$

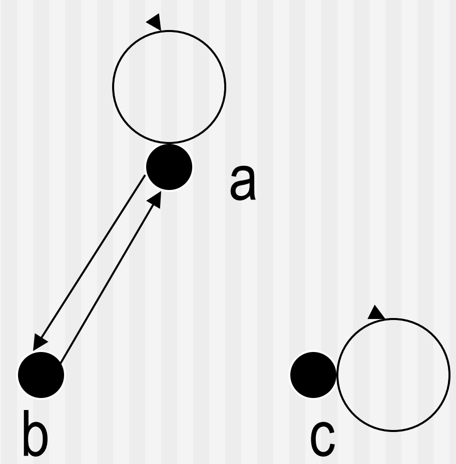
例2.5(续)

R_3={<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>}
自反,对称,传递

R_4={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,c>}对称



$G(R_3)$

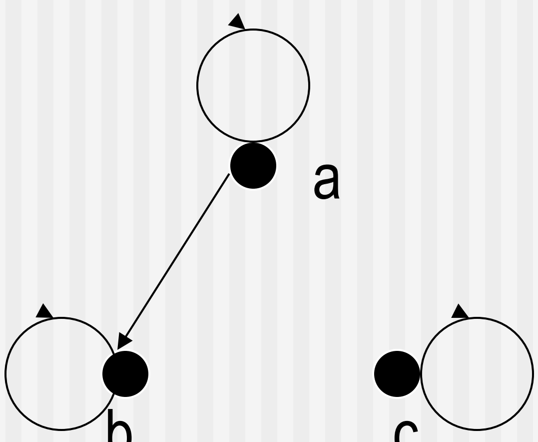


$G(R_4)$

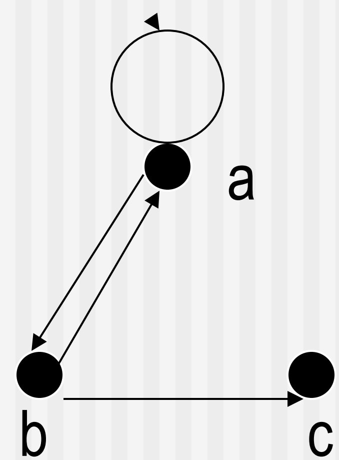
例5(续)

$R_5=\{<a,a>,<a,b>,<b,b>,<c,c>\}$自反,反对称,传递

$R_6=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<a,a>\}$没有以上5种性质中的任何一种. #



G(R_5)



G(R_6)

关系运算的性质

- 定理2.15 设$R_1,R_2 \subseteq A \times A$

(1)若R_1,R_2是自反的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$也是自反的;

(2)若R_1,R_2是反自反的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$也是反自反的;

(3)若R_1,R_2是对称的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$, $\sim R_1$, $\sim R_2$也是对称的;

(4)若R_1,R_2是反对称的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$也是反对称的;

(5)若R_1,R_2是传递的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 \cap R_2$也是传递的.

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√		
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \bigcirc R_2$, $R_2 \bigcirc R_1$	√				
R_1-R_2, R_2-R_1		√	√	√	
$\sim R_1$, $\sim R_2$			√		

定理2.15(证明(1))

(1) R_1,R_2自反 $\Rightarrow R_1 \circ R_2$自反.

证明:$\forall x$,

$$x \in A$$

$$\Rightarrow xR_2x \wedge xR_1x$$

$$\Rightarrow xR_1 \circ R_2x$$

$\therefore$ R_1,R_2自反 $\Rightarrow R_1 \circ R_2$自反. #

定理2.15(证明(2))

(2) R_1,R_2反自反 $\Rightarrow$ $R_1 \cap R_2$反自反.

证明: (反证)

$$\exists x \in A, <x,x> \in (R_1 \cap R_2)$$

$$\Leftrightarrow xR_1x \wedge xR_2x$$

与R_1,R_2反自反矛盾!

$\therefore$ R_1,R_2反自反 $\Rightarrow$ $R_1 \cap R_2$反自反. #

定理2.15(证明(3))

(3) R_1,R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称.

证明:$\forall x,y\in A$,

$$
\begin{aligned}
&<x,y>\in(R_1-R_2)\\
\Leftrightarrow\ & xR_1y \wedge \neg xR_2y\\
\Leftrightarrow\ & yR_1x \wedge \neg yR_2x\\
\Leftrightarrow\ & y(R_1-R_2)x
\end{aligned}
$$

$\therefore$ R_1,R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称. #

定理2.15(证明(3)续)

(3) R_1对称 $\Rightarrow \sim R_1$对称.

证明: $\forall x,y\in A$,

$$x(\sim R_1)y \Leftrightarrow x(E_A-R_1)y$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in E_A \wedge <x,y>\notin R_1$$

$$\Leftrightarrow <y,x>\in E_A \wedge <y,x>\notin R_1$$

$$\Leftrightarrow y(E_A-R_1)x \Leftrightarrow y(\sim R_1)x$$

$\therefore$ R_1对称 $\Rightarrow \sim R_1$对称. #

定理2.15(证明(4))

(4) R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称.

证明: (反证) 若R_1^{-1}非反对称, 则

$$\exists x,y\in A,$$

$$xR_1^{-1}y \wedge yR_1^{-1}x \wedge x\neq y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge xR_1y \wedge x\neq y$$

$\Leftrightarrow$ R_1非反对称

与R_1反对称矛盾!

$\therefore$ R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称. #

定理2.15(证明(5))

(5) R_1,R_2传递 $\Rightarrow$ $R_1 \cap R_2$传递.

证明:$\forall x,y,z \in A$,

$$x(R_1 \cap R_2)y \wedge y(R_1 \cap R_2)z$$

$$\Leftrightarrow xR_1y \wedge xR_2y \wedge yR_1z \wedge yR_2z$$

$$\Leftrightarrow xR_1y \wedge yR_1z \wedge xR_2y \wedge yR_2z$$

$$\Rightarrow \langle x,z \rangle \in R_1 \wedge \langle x,z \rangle \in R_2$$

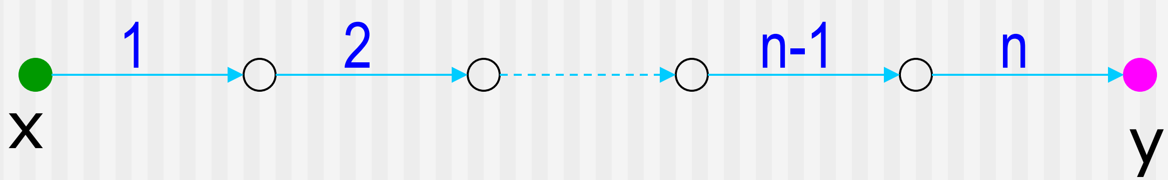
$$\Leftrightarrow x(R_1 \cap R_2)z$$

$\therefore$ R_1,R_2传递 $\Rightarrow$ $R_1 \cap R_2$传递. #

- 2.5 关系幂(power)运算

关系的n次幂

- 关系的n次幂(nth power): 设$R \subseteq A \times A$, $n \in N$, 则
  - (1) $R^0 = I_A$;
  - (2) $R^{n+1} = R^n \circ R$, $(n \geq 1)$.
- $$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n个R}$$



定理2.17 指数律

- 指数律:

  (1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;

  (2) $(R^m)^n = R^{mn}$.

- 说明:

  对一般关系R来说, $m,n \in N$.

定理2.17(证明(1))

- (1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;
- 证明: (1) 给定m, 对n归纳.

n=0时, $R^m \circ R^n = R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$.

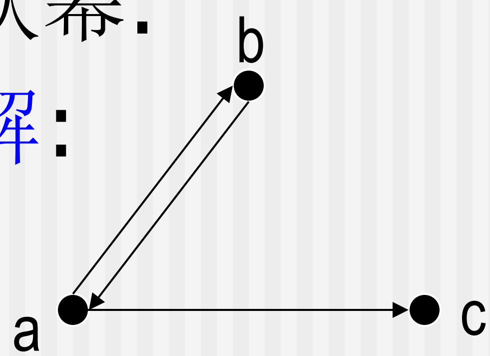
假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则

$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R^1) = (R^m \circ R^n) \circ R^1 = R^{m+n} \circ R = R^{(m+n)+1} = R^{m+(n+1)}$.

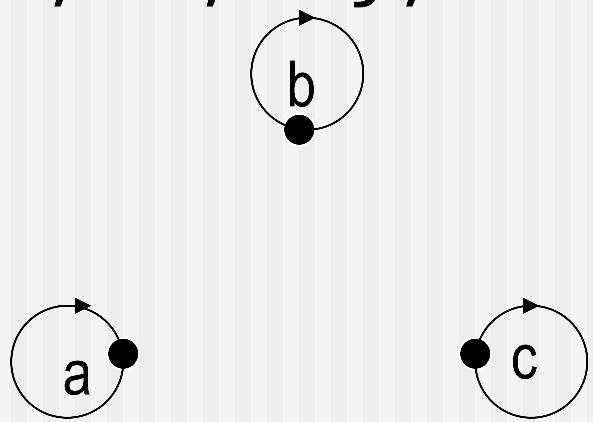
(2) 同样对m归纳. #

关系幂运算(举例)

- 例：设$A=\{a,b,c\}$, $R\subseteq A\times A$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$, 求R的各次幂.
- 解：



G(R)



$G(R^0)$
$=G(\mathbf{I}_A)$

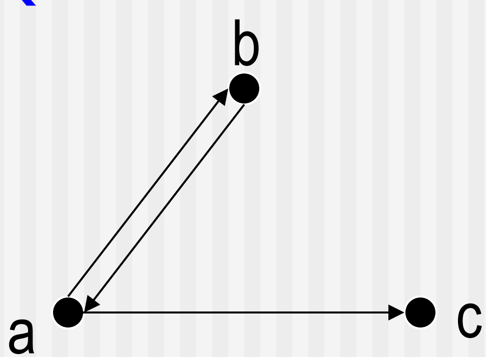
关系幂运算(举例,续)

- 解(续): $R^0 = I_A$,

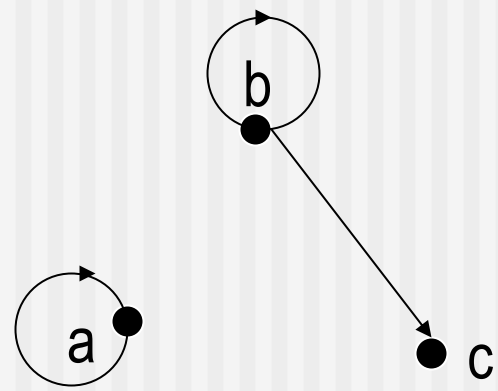
$R^1 = R^0 \circ R = \{<a,b>,<b,a>,<a,c>\}$,

$R^2 = R^1 \circ R = \{<a,a>,<b,b>,<b,c>\}$,

$R^3 = R^2 \circ R = \{<a,b>,<b,a>,<a,c>\} = R^1$



G(R)



G(R^2)

关系幂运算(举例,续2)

- 解(续): $R^4 = R^3 \circ R = R^1 \circ R = R^2$, $R^5 = R^4 \circ R = R^2 \circ R = R^3 = R^1$,

所以,

$$R^{2k+1}=R^1=R,\ k=0,1,2,\ldots,$$

$$R^{2k}=R^2,\qquad k=1,2,\ldots,. \qquad \#$$

定理2.16

- 定理2.16: 设 $|A|=n$, $R\subseteq A\times A$, 则 $\exists s,t\in N$, 并且 $0\le s<t\le 2^{n^2}$, 使得 $R^s = R^t$.
- 证明: $P(A\times A)$对幂运算是封闭的, 即

  $\forall R, R\in P(A\times A) \Rightarrow R^k\in P(A\times A), (k\in N)$.

$|P(A\times A)| = 2^{n^2}$, 在$R^0,R^1,R^2,\ldots, R^{2^{n^2}}$这 $2^{n^2}+1$个集合中, 必有两个是相同的.

所以 $\exists s,t\in N$, 并且 $0\le s<t\le 2^{n^2}$,

使得 $R^s = R^t$. #

定理2.18

- 定理2.18: 设 $R \subseteq A \times A$, 若 $\exists s,t \in N$ $(s<t)$,使得$R^s = R^t$, 则

  (1) $R^{s+k} = R^{t+k}$;

  (2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$k,i \in N$, $p=t-s$;

  (3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则$\forall q \in N$, $R^q \in S$.

定理2.18(证明(2))

- (2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中k,i∈N, p=t-s;
- 证明: k=0时,显然;

  k=1时,即(1);

  设 k≥2. 则

$$R^{s+kp+i} = R^{s+k(t-s)+i} = R^{s+t-s+(k-1)(t-s)+i}$$

$$= R^{t+(k-1)(t-s)+i} = R^{s+(k-1)(t-s)+i} = \ldots$$

$$= R^{s+(t-s)+i} = R^{t+i} = R^{s+i} . \quad \#$$

定理2.18 (证明(3))

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则$\forall q\in N$, $R^q\in S$.

- 证明: 若$q<t-1$，结论显然成立;

若 $q>t-1\geq s$, 则令 $q=s+kp+i$,

其中 $k,i\in N$, $p=t-s$, $s+i<t$;

于是 $R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}\in S$.

幂指数的化简

- 方法: 利用定理16, 定理18.
- 例2.6: 设 $R \subseteq A \times A$, 化简R^{100}的指数. 已知

  (1) $R^7 = R^{15}$; (2) $R^3 = R^5$; (3) $R^1 = R^3$.
- 解:

(1) $R^{100}=R^{7+11\times 8+5}=R^{7+5}=R^{12}\in\{R^0,R^1,\ldots,R^{14}\}$;

(2) $R^{100}=R^{3+48\times 2+1}=R^{3+1}=R^4\in\{R^0,R^1,\ldots,R^4\}$;

(3) $R^{100}=R^{1+49\times 2+1}=R^{1+1}=R^2\in\{R^0,R^1,R^2\}$. #

总结

- 关系表示：关系矩阵和关系图
- 5种性质：
  - 自反
  - 反自反
  - 对称
  - 反对称
  - 传递
- 幂运算

作业

- P54: 16, 17, 19,
- P55: 21, 22, 27， 28