1.4 基本的集合恒等式

- 13组基本的集合恒等式
- 证明方法
  - 逻辑演算法
  - 集合演算法

集合恒等式(1)

(1)幂等律(idempotent laws):

$$A\cup A=A;\quad A\cap A=A$$

(2)交换律(commutative laws):

$$A\cup B=B\cup A;\quad A\cap B=B\cap A$$

(3)结合律(associative laws):

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

(4)分配律(distributive laws):

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(5)德•摩根律(De Morgan's laws)

绝对形式：$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

$$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$$

相对形式：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

(6)吸收律(absorption laws)

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

(7)零律(dominance laws)

$$A \cup E = E, A \cap \Phi = \Phi$$

(8)同一律(identity laws)

$$A \cup \Phi = A, A \cap E = A$$

(9)排中律(excluded middle)

$$A \cup \sim A = E$$

(10)矛盾律(contradiction)

$$A \cap \sim A = \Phi$$

(11)余补律 $\sim \Phi = E; \sim E = \Phi;$

(12)双重否定律(double complement law)

$$\sim(\sim A) = A$$

(13)补交转换律(difference as intersection)

$$A - B = A \cap \sim B$$

集合恒等式（推广到集族）

- 分配律

$$B \bigcup (\bigcap \{\mathbf{A}_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcap_{\alpha \in S} (\mathbf{B} \bigcup \mathbf{A}_\alpha)$$

$$B \bigcap (\bigcup \{\mathbf{A}_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcup_{\alpha \in S} (\mathbf{B} \bigcap \mathbf{A}_\alpha)$$

- 德摩根律

$$\sim \bigcup \{\mathbf{A}_\alpha\}_{\alpha \in S} = \bigcap_{\alpha \in S} \sim \mathbf{A}_\alpha \;; \quad \mathbf{B} - \bigcup \{\mathbf{A}_\alpha\}_{\alpha \in S} = \bigcap_{\alpha \in S} (\mathbf{B} - \mathbf{A}_\alpha)$$

$$\sim \bigcap \{\mathbf{A}_\alpha\}_{\alpha \in S} = \bigcup_{\alpha \in S} \sim \mathbf{A}_\alpha \;; \quad \mathbf{B} - \bigcap \{\mathbf{A}_\alpha\}_{\alpha \in S} = \bigcup_{\alpha \in S} (\mathbf{B} - \mathbf{A}_\alpha)$$

对偶原理(dual principle)

- 对偶式(dual): 一个集合关系式, 如果只含有∩,∪,~,∅, E,=, ⊆,那么, 同时把∪与∩互换, 把∅与E互换, 把⊆与⊇互换, 得到的式子称为原式的对偶式.
- 对偶原理: 对偶式同真假. 或者说, 集合恒等式的对偶式还是恒等式.
- 例：分配律、排中律 …

对偶原理举例

- $A \cap B \subseteq A$

  $A \cup B \supseteq A$

- $\varnothing \subseteq A$

  $E \supseteq A$

半形式化证明

- 逻辑演算法:
  - 利用定义、逻辑等值式、推理规则
- 集合演算法:
  - 利用定义、集合恒等式、已知结论

逻辑演算法证明(=)

- 题目：A=B
- 证明：$\forall x$,

  $x \in A$

  $\Leftrightarrow$ … (定义、逻辑等值式)

  $\Leftrightarrow$ … (…)

  $\Leftrightarrow$ $x \in B$

  $\therefore$ A=B. #

分配律的证明

例1 证明 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

证：$\forall x$,

$$A\cup(B\cap C)$$
$$\Leftrightarrow\{x \mid x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\}$$
$$\Leftrightarrow\{x \mid (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\}$$ (命题逻辑分配律)
$$\Leftrightarrow\{x \mid x\in(A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)\}$$
$$\Leftrightarrow(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$\therefore A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ #

结合律的证明

例2 证明$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

证：$\forall x$,

$$
\begin{aligned}
&(A\cap B)\cap C \\
\Leftrightarrow &\{x \mid x\in A\wedge x\in B\wedge x\in C\} \\
\Leftrightarrow &\{x \mid x\in A \wedge (x\in B\wedge x\in C)\} \\
\Leftrightarrow &\{x \mid x\in A \wedge x\in B\cap C)\} \\
\Leftrightarrow &\ \mathbf{A\cap(B\cap C)}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ #

集合演算法证明

- 题目：**A=B**
- 证明：**A**
  - = **… (定义、集合恒等式、已知结论)**
  - = **… (…)**
  - = **B**

  ∴ **A=B.** **#**

例4 证明吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

证明:

$A \cup (A \cap B)$

$= (A \cap E) \cup (A \cap B)$ （同一律）

$= A \cap (E \cup B)$ （分配律）

$= A \cap E$ （零律）

$= A$ （同一律）

$$\therefore\ A \cup (A \cap B) = A$$

证明:

$A\cap(A\cup B)$

$= (A\cap A)\cup(A\cap B)$ (等幂律)

$= A\cup(A\cap B)$ (分配律)

$= A$ (吸收律第一式)

$\therefore A\cap(A\cup B) = A$ #

例5 证明德. 摩根律的相对形式

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

证明:

$A - (B \cup C)$

$= A \cap \sim(B \cup C)$ (补交转换律)

$= A \cap (\sim B \cap \sim C)$ (德•摩根律)

$= (A \cap A) \cap (\sim B \cap \sim C)$ (幂等律)

$= (A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C)$ (交换律,结合律)

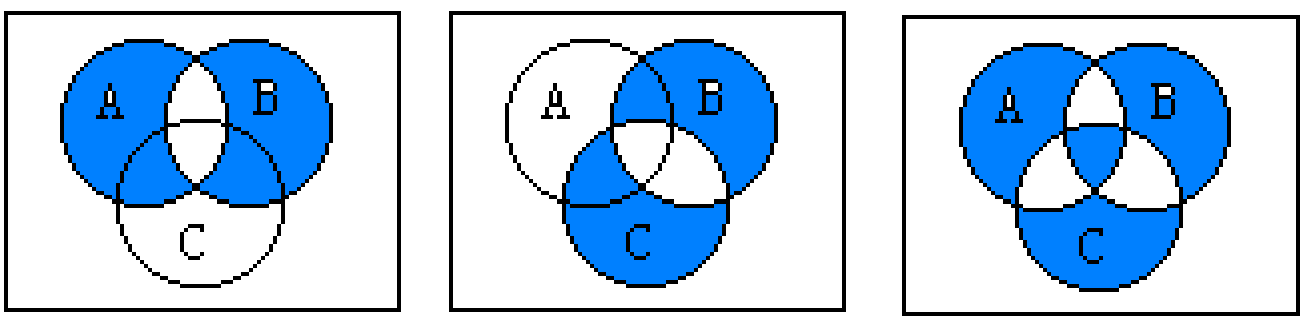
$= (A-B) \cap (A-C)$ (补交转换律). #

- 对称差的性质
- 集族的性质
- 幂集的性质

证明对称差运算的性质

- **交换律：** $A \oplus B = B \oplus A$
- **结合律：** $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- **分配律：** $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
- $A \oplus \Phi = A$，$A \oplus E = \sim A$
- $A \oplus A = \Phi$，$A \oplus \sim A = E$

对结合律，用文氏图说明如下：



$A \oplus B$　　　$B \oplus C$　　　$A \oplus B \oplus C$

集合演算法证明

- 题目：A=B
- 证明：

  A=…=…=C

  B=…=…=C

  ∴ A=B.   #

对称差结合律的证明

$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$

证明:首先,

$A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$ ($\oplus$定义)

$= (A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)$ (补交转换律)

$= (A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B)$ ($\cap$交换律) (*)

对称差结合律的证明(续)

$A \oplus (B \oplus C)$

$= (A\cap\sim(B \oplus C)) \cup (\sim A\cap(B \oplus C))$

$= (A\cap\sim((B\cap\sim C) \cup (\sim B\cap C))) \cup (\sim A\cap((B\cap\sim C) \cup (\sim B\cap C)))$

$= (A\cap(\sim(B\cap\sim C)\cap \sim(\sim B\cap C))) \cup (\sim A\cap((B\cap\sim C) \cup (\sim B\cap C)))$ (德•摩根律)

$= (A\cap(\sim(B\cap\sim C)\cap \sim(\sim B\cap C))) \cup (\sim A\cap((B\cap\sim C) \cup (\sim B\cap C)))$

对称差结合律的证明(续)

$= (A\cap(\sim B\cup C)\cap(B\cup\sim C))\ \cup$
$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$ (德•摩根律)

$= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap\sim B\cap\sim C)$
$\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap\sim B\cap C)$ (分配律)

对称差结合律的证明(续)

同理, $(A \oplus B) \oplus C$

$= (A \oplus B) \cap \sim C) \cup (\sim(A \oplus B) \cap C)$

$= (((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) \cap \sim C) \cup$
$(\sim((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) \cap C)$

$= (((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) \cap \sim C) \cup$
$((\sim(A \cap \sim B) \cap \sim(\sim A \cap B)) \cap C)$ (德•摩根律)

$= (((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) \cap \sim C) \cup$
$((\sim(A \cap \sim B) \cap \sim(\sim A \cap B)) \cap C)$

对称差结合律的证明(续)

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$((\sim A\cup B)\cap(A\cup\sim B))\cap C)$ (德•摩根律)

$= (A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup$

$(\sim A\cap\sim B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$ (分配律…)

$\therefore A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C.$ #

对称差分配律的证明

$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

证明: $A\cap(B\oplus C)$

$= A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C))$

$= (A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap C)$

$(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

$= ((A\cap B)\cap\sim(A\cap C))\cup(\sim(A\cap B)\cap(A\cap C))$

$=((A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C))\cup((\sim A\cup\sim B)\cap(A\cap C))$

$=(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap C)$

$\therefore A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$. #

- $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$ √
- $A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$?
- $A\oplus(B\cap C)=(A\oplus B)\cap(A\oplus C)$?
- $A\oplus(B\cup C)=(A\oplus B)\cup(A\oplus C)$?

- 先构造文氏图观察, 如果成立则进行证明, 如果不成立, 则构造反例

$\oplus$的其他性质

- 消去律：$A \oplus B = A \oplus C \Leftrightarrow B = C$

  $A = B \oplus C \Leftrightarrow B = A \oplus C \Leftrightarrow C = A \oplus B$

- 补运算：$\sim(A \oplus B) = \sim A \oplus B = A \oplus \sim B$

  $A \oplus B = \sim A \oplus \sim B$

集族的性质

设$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$为集族,则

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \cup \mathcal{A} \subseteq \cup \mathcal{B}$
2. $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A \subseteq \cup \mathcal{B}$
3. $(\mathcal{A} \neq \varnothing) \wedge \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \cap \mathcal{B} \subseteq \cap \mathcal{A}$
4. $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \cap \mathcal{B} \subseteq A$
5. $\mathcal{A} \neq \varnothing \Rightarrow \cap \mathcal{A} \subseteq \cup \mathcal{A}$

⊆的证明方法

题目：$A \subseteq B$

证明：$\forall x$,

$x \in A$

$\Rightarrow$…(定义、逻辑等值式、推理规则)

$\Rightarrow$…(…)

$\Rightarrow x \in B$

$\therefore A \subseteq B$. #

证明集族性质：(1) $A\subseteq B \Rightarrow \cup A \subseteq \cup B$

证明: $\forall x$,

$x \in \cup A \Leftrightarrow \exists z(z \in A \land x \in z)$ ($\cup A$定义)

$\Rightarrow \exists z(z \in B \land x \in z)$ (已知$A\subseteq B$)

$\Leftrightarrow x \in \cup B$ ($\cup B$定义)

$\therefore \cup A \subseteq \cup B$. #

证明集族性质：(2)$A \in B \Rightarrow A \subseteq \cup B$

证明: $\forall x$,

$x \in A \Rightarrow A \in B \wedge x \in A$ (A∈B,合取)

$\Rightarrow \exists z (z \in B \wedge x \in z)$ (存在推广规则)

$\Leftrightarrow x \in \cup B$

$\therefore A \subseteq \cup B$. #

存在推广规则(EG)

- $P(c) \Rightarrow \exists x P(x)$　　　　c是常元

- **前提: P(c)**
  结论: $\exists x P(x)$

- **(3) $(A\neq\varnothing)\wedge A\subseteq B\Rightarrow\cap B\subseteq\cap A$**

说明: 若约定$\cap\varnothing=E$, 则$A\neq\varnothing$的条件可去掉.

证明: $\forall x,\ x\in\cap B$

$\Leftrightarrow\forall y(y\in B\rightarrow x\in y)$

$\Rightarrow\forall y(y\in A\rightarrow x\in y)$ **$(A\subseteq B)$**

$\Leftrightarrow x\in\cap A$

$\therefore\cap B\subseteq\cap A$. #

- **(4) $A \in B \Rightarrow \cap B \subseteq A$**

证明: $\forall x$,

$x \in \cap B$

$\Leftrightarrow \forall y(\ y \in B \rightarrow x \in y\ )$

$\Rightarrow A \in B \rightarrow x \in A$ (全称指定规则)

$\Rightarrow x \in A (A \in B)$

$\therefore \cap B \subseteq A$. #

全称指定规则

- **$\forall xA(x) \Rightarrow A(b)$** **b**是常元

- 前提**: $\forall xA(x)$**
- 结论**: A(b)**

- **(5) $A \neq \emptyset \Rightarrow \cap A \subseteq \cup A$**

说明: A≠ Ø 的条件不可去掉!

证明: $\forall x, x \in \cap A$

$\Leftrightarrow \forall y(y \in A \rightarrow x \in y)$

$\Rightarrow z \in A \rightarrow x \in z$ **A≠ Ø (全称指定规则)**

$\Rightarrow x \in z\ (z \in A) \Rightarrow z \in A \wedge x \in z$

$\Rightarrow \exists y(y \in A \wedge x \in y) \Leftrightarrow x \in \cup A$

$\therefore \cap A \subseteq \cup A$. #

集合幂运算的性质：

（1） $A \subseteq B$ 当且仅当 $P(A) \subseteq P(B)$

（2） $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\Phi\}$

（3） $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

（4） $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

$A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

证：（1）先证必要性，对P(A)中任意x

$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \Leftrightarrow x \in P(B)$，故$P(A) \subseteq P(B)$

（2）再证充分性，对于A中任意y，

$y \in A \Leftrightarrow \{y\} \in P(A) \Rightarrow \{y\} \in P(B) \Leftrightarrow y \in B$，故 $A \subseteq B$

$\therefore A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$ #

$P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\Phi\}$

证明：对于任意集合x,

若$x=\Phi$，$x \in P(A-B)$ 且$x \in (P(A)-P(B)) \cup \{\Phi\}$

若$x \neq \Phi$，$x \in P(A-B) \Leftrightarrow x \subseteq (A-B) \Rightarrow x \subseteq A \wedge x \not\subseteq B$

$\Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \notin P(B) \Leftrightarrow x \in (P(A)-P(B))$

综上所述 可知(2)成立 #

$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

证明: $\forall x, x \in P(A) \cup P(B)$

$\Leftrightarrow x \in P(A) \vee x \in P(B)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B$

$\Rightarrow x \subseteq A \cup B \Leftrightarrow x \in P(A \cup B)$

$\therefore P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ #

- 讨论: 给出反例,

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $A\cup B=\{1,2\}$, $P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}$, $P(B)=\{\emptyset,\{2\}\}$, $P(A)\cup P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$

$P(A\cup B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

此时, $P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$. #

证明技巧

- **A=B.**

证明: (⊆) …

∴A⊆B

(⊇) …

∴A⊇B

∴A = B.

#说明: 分=成⊆与⊇

- **A⊆B.**

证明: **A∩B (A∪B)**

=…(…)

= A (=B)

∴A⊆B. #

说明: 化⊆成**=利用**

A∩B=A⇔A⊆B

A∪B=B⇔A⊆B

小结

- 集合运算
- 集合恒等式
- 证明方法和技巧

作业

P21: 14， 20， 25(3)， 30(1)