第一章 集合

- 三次数学危机

- 集合是数学中最基本的概念。既然是最基本的概念，就不是很好定义，一般只是说明。要说明什么是集合，有多种描述方法：“所要讨论的一类对象的整体”；“具有同一性质单元的集体”等。当我们讨论某一类对象的时候，就把这一类对象的整体称为集合。而集合中的对象就成为该集合中的元素。
- Cantor是这样描述集合的：所谓集合，是指我们无意中或思想中将一些确定的，彼此完全不同的客体的总和考虑为一个整体。这些客体叫做该集合的元素。

1.2 集合的概念和集合之间的关系

1.3 集合的运算

1.4 基本的集合恒等式

*1.5 集合列的极限

1.2 集合的概念和集合之间的关系

- 集合的概念
- 集合的表示
- 集合间的关系
- 幂集
- 集族

集合的概念

- 设A是一个集合，a是集合A中的元素(member)，将这一事实记为$a \in A$，读作a属于A；若a不是集合A中的元素，则记为$a \notin A$，读作a不属于A。
- 例如，一间教室里所有桌子的整体就作为一个桌子集合。每张桌子都属于这个集合，每把椅子就不属于这个集合。

集合的表示

集合用大写字母，集合元素用小写字母。如$x\in A$，$y\notin A$。

- （1）列举法(listing) ---- 列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，用花括号{...}括起来。例：设A是由a,b,c,d为元素的集合，B是正偶数集合，则A={a,b,c,d}, B={2,4,6,8,…}
- （2）描述法(Abstraction) ---- 通过说明集合中元素所具有的共同的性质来定义一个集合。用谓词P(x)表示x具有性质P，{x ｜ P(x)}表示具有性质P的集合。例：P(x):x是英文字母，Q(y):y是十进制数字。则C={x|P(x)}和D={y|Q(y)}分别表示26个英文字母和10个十进制数字集合

注意：

1）集合中的元素各不相同

2）集合中的元素不规定顺序

3）集合的两种表示方法有时是可以相互转化的

例：$B=\{x|x \in N$且x为非0偶数$\}$，或$\{x|x=2(k+1)$且$k \in N\}$

几个常用的集合及其记号:

N(自然数集合): + *封闭,逆运算不封闭

Z (整数集合): + 及其逆运算,*封闭, 但*的逆运算不封闭

Q (有理数集合) : +,*,逆运算封闭，全序域，具有稠密性空隙（不连通）

R(实数集合)

C(复数集合)

集合之间的关系

- 子集、相等、真子集
- 空集、全集
- 幂集、**n**元集、有限集
- 集族

- 定义1.1　给定集合A和B，如果B中每个元素都是A中的元素，则称B为A的子集(subset)，记作$B\subseteq A$或$A\supseteq B$，读作“B包含于A”或“A包含B”。

$$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\rightarrow x\in B)$$

设A={a,b,c}, B={a,b,c,d}, C={a,b}，则$A\subseteq B$, $C\subseteq A$, $C\subseteq B$

按子集的定义，对于任何集合A、B、C，

(1) $A\subseteq A$（自反性）

(2) $(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C)\Rightarrow(A\subseteq C)$　（传递性）

“A是B的**子集(subset)**”，记作$A\subseteq B$ 是指：

（1）A中的所有元素都是B的元素。或者

（2）在A中找不到一个不属于B的元素。或者

（3）对$\forall x\in A$，均有$x\in B$。

“A**不是**B的子集”是指：

A中至少有一个元素不属于B。

（$\exists x\in A$，但$x\notin B$）

记作$A\nsubseteq B$。

证明： $A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$

证明： $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \neg (A \subseteq B)$

$\Leftrightarrow \neg ((\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B))$

$\Leftrightarrow (\exists x) \neg (\neg(x \in A) \vee (x \in B))$

$\Leftrightarrow (\exists x) (x \in A \wedge x \notin B)$

•定义1.2 **两个**Ａ和Ｂ，若A包含B且B包含A，则称**A与B相等**，记作Ａ＝Ｂ。集合Ａ与Ｂ不相等，记作$A \neq B$。

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

例：设A= {2}, B={1，4}, C={x|x^2-5x+4=0}, D= {x| x为偶素数}

则 A=D , B=C

• 定义1.3　给定集合Ａ和Ｂ，如果Ａ$\subseteq$Ｂ且Ａ$\neq$Ｂ，则称Ａ为Ｂ的真子集，记作Ａ$\subset$Ｂ。

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge x \notin A)$$

设三个集合Ａ，Ｂ，C，从定义可以得到下面3个命题为真：

(1) $A \not\subset A$；(2) 若$A \subset B$，则 $B \not\subset A$；

(3) 若$A \subset B$ 且 $B \subset C$，则$A \subset C$

- **空集**

定义1.4　不含任何元素的集合叫空集，记作Φ。

例如，$\Phi = \{x \mid P(x) \wedge \neg P(x)\}$，P(x)是任意谓词。

$A=\{x \mid x \in R \wedge x^2+1=0\}$是空集，式中R表示实数集合。

- **全集**

定义1.5 在研究某一问题时，如果限定所讨论的集合都是某一集合的子集，则称该集合为全集，记作E。即

$E = \{x \mid P(x) \vee \neg P(x)\}$。（P(x)是任意谓词）

显然，全集的概念相当于论域，它是一个相对概念。

例如，如果讨论(a, b)上的实数，就取(a, b)为全集。也可以取[a, b)，（a, b], 实数集R等为全集。

- **定理1.1** 空集是任意集合的子集。

证明:

- **推论** 空集是唯一的。

证明: 反证法

- **定理1.1** **空集是任意集合的子集。**

证明：任给集合A，Φ是空集。则（$\forall x)(x\in \Phi\rightarrow x\in A)$ 永真，这是因为条件式的前件$(x\in \Phi)$永假，所以该条件式对一切 x 皆为真。按子集的定义，$\Phi\subseteq A$为真。 #

- **推论** **空集是唯一的。**

证明：**证：假定Φ_1和Φ_2为二空集。**

由定理2，$\Phi_1\subseteq\Phi_2$，$\Phi_2\subseteq\Phi_1$。

再根据定理1，$\Phi_1=\Phi_2$ 。 #

- 定义1.6 集合A的所有子集构成的集合叫A的幂集(power set)，记作P(A)。用描述法表示为：$\mathbf{P(A)=\{x \mid x \subseteq A\}}$。

- 性质

（1） $x \in P(A)$ 当且仅当 $x \subseteq A$ 。

（2）设A,B是两个集合,$A \subseteq B$当且仅当$P(A) \subseteq P(B)$ 。

含有n个元素的集合为n元集(n≥1)

例，设 A = {a, b, c}, 则

0元子集： **Φ**;

1元子集： **{a},{b},{c}**;

2元子集： **{a,b},{a,c},{b,c}**

3元子集： **{a,b,c}**

P(A)＝{Φ,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

定理1.2　设A有 n 个元素，则P(A)有2^n个元素。

证明：**A**的所有由 k 个元素组成的子集个数为从 n 个元素中取 k 个元素的组合数：

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^k . y^{n-k}$$

另外，因**Φ⊆A**，故**P(A)**中元素的个数N可表示为：

$$N = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

在$(x+y)^n$的展开式中令**x=y=1**得：

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = N$$

#

集族： 由集合构成的集合

- 定义1.7 设A为一个集族，S为一个集合，若对于任意的$\alpha \in S$，存在唯一的$A_\alpha \in A$与之对应，而且A中的任何集合都对应S中的某一个元素，则称A是以S为指标集的**集族**，S称为A的**指标集**。

$\varnothing$为**空集族**

定义： 设**A**是一个集合。若**A**的元素都是集合，则称**A**为**集合族**。若集合族**A**可表示为**A**$=\{S_d | d \in D\}$,则称D为集合族**A**的**指标集**。

- 例如

[1]设$A_1=\{x|x\in N \wedge x$为奇数$\}$，$A_2=\{x|x\in N \wedge x$为偶数$\}$，则$\{A_1, A_2\}$是以$\{1,2\}$为指标集的集族

[2] P(A)是一个集合族，设$A_1, A_2, A_3, ...$ 是集合的序列，且两两之间互不相同，则集合$\{A_1, A_2, A_3, ...\}$是一个集合族，可表示为$\{A_i|i \in Z\}$，其中Z为自然数集合，是指标集。

[3] 设p是一个素数，$A_k=\{x|x=k(\mathrm{mod}\ p)\}$，$k = 0, 1, ..., p-1$，则$\{A_1, A_2, ..., A_{p-1}\}$是以$\{0, 1, 2, ..., p-1\}$为指标集的集族

- 多重集合 设全集为E，E中元素可以不止一次在A中出现的集合A，称为**多重集合**．若E中元素α在A中出现k（$k\geq 0$）次，则称α在A中的重复度为k．

- 例： 设全集E={a，b，c，d，e}，A={a，a，b，b，c}为多重集合，其中a，b的重复度为2，c的重复度为1，而d，e的重复度均为0。

集合可看作是各元素重复度均小于等于1的多重集合。

1.3 集合的运算

定义1.8　设A、B为两个集合，称由A与B的所有元素组成的集合为A与B的并集(union)，记作$A\cup B$，称$\cup$为并运算符，$A\cup B$ 的描述法表示为$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$

设：$A=\{x|x \in N \wedge 5 \le x \le 10\}$，$B=\{x| x \in N \wedge x \le 10 \wedge x$为素数$\}$,

则 $A \cup B = \{2,3,5,6,7,8,9,10\}$

集合的并运算可以推广到有限个或可数个集合

对于可数个集合$A_1, A_2, \ldots,$

记$A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$为并集

设$A_n = \{x \mid x \in R \wedge n-1 \le x \le n\}$, n=1, 2, . . . , 10, 则

$$\bigcup_{i=1}^{10} A_n = \{x \mid x \in R \wedge 0 \le x \le 10\} = [0,10]$$

定义1.9 设A、B为两个集合，称由A与B的公共元素组成的集合为A与B的交集(intersection)，记作$A\cap B$，称$\cap$为交运算符，$A\cap B$的描述法表示为$A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$

设：$A=\{x|x \in N \wedge 5 \le x \le 10\}$，$B=\{x| x \in N \wedge x \le 10 \wedge x$为素数$\}$,

则 $A\cap B = \{5,7\}$

集合的交运算可以推广到有限个或可数个集合

设$A_n=\{x \mid x\in R\wedge 0\le x\le n\}$, n=1, 2, . . . , 则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x\in R\wedge 0\le x\le 1\} = [0,1]$$

定义1.10　设A、B为两个集合，若$A \cap B = \varnothing$，则称**A,B**是不交的**(disjoint)**，设A_1，A_2，…是可数个集合，若对于任意的$i \neq j$，均有$A_i \cap A_j = \varnothing$，则称$A_1, A_2, \ldots$是不相交的

设$A_n = \{x \mid x \in R \wedge n-1 < x < n\}$, n=1, 2, . . . , 则

$A_1, A_2, \ldots$是互不相交的

定义1.11 设A、B为两个集合，称属于A而不属于B的全体元素组成的集合为B对A的相对补集(difference)，记作A－B，称－为相对补运算符， A－B 的描述法表示为

$$A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

定义1.13 设E为全集，A⊆E，称A对E的相对补集为A的绝对补集(complement)，并将E－A简记为~A，称~为绝对补运算符， ~A的描述法表示为$\sim A=\{x \mid x\in E\wedge x\notin A\}$

定义1.12 设A、B为两个集合，称属于A而不属于B,或属于B而不属于A的全体元素组成的集合为A与B的对称差，记作$A \oplus B$，称$\oplus$为对称差运算符，$A \oplus B$的描述法表示为$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

设：$A=\{x|x \in R \wedge 0 \le x < 2\}$，$B=\{x| x \in R \wedge 1 \le x < 3\}$, 则

$A - B = \{x| x \in R \wedge 0 \le x < 1\} = [0,1)$

$B - A = \{x| x \in R \wedge 2 \le x < 3\} = [2, 3)$

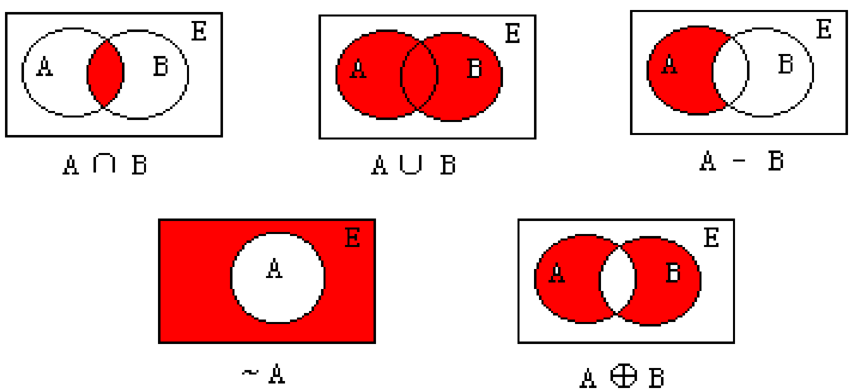
$A \oplus B = [0,1) \cup [2,3)$

将R作为全集，则

$\sim A = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$

文氏图：用矩形代表全集，用圆或其他闭合曲线的内部代表E的子集，并将运算结果得到的集合用阴影部分表示。

用文氏图可将集合表示如下：



$$A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$$
$$A\cup B=\{x \mid x\in A\vee x\in B\}$$
$$A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$$
$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$
$$\sim A=\{x \mid x\in E\wedge x\notin A\}$$

注意：文氏图只是对某些集合之间的关系及运算结果给出一种直观而形象的示意性的表示，而不能用来证明集合等式及包含关系。

例1 设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,4\}$，$C=\{3\}$。求$A\cup B$, $B\cup A$, $A\cap B$, $B\cap A$, $A-B$, $A\oplus B$, $C\cap A$, $B\cap C$。

解:

例2 设$E=\{a,b,c,d\}$, $A=\{a,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $c=\Phi$, 求 $\sim A$, $\sim B$, $\sim C$。

解:

例1 设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,4\}$，$C=\{3\}$。求$A\cup B$, $B\cup A$, $A\cap B$, $B\cap A$, $A-B$, $A\oplus B$, $C\cap A$, $B\cap C$。

解: $A\cup B=\{1,2,3,4\}=B\cup A$

$A\cap B=\{1\}=B\cap A$

$A-B=\{2,3\}$ $A\oplus B=\{2,3,4\}$

$C\cap A=\{3\}$, $B\cap C=\Phi$

例2 设$E=\{a,b,c,d\}$, $A=\{a,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $c=\Phi$, 求 $\sim A$, $\sim B$, $\sim C$ 。

解: $\sim A=\{b,d\}$， $\sim B=\Phi$ ， $\sim C=\{a,b,c,d\}=E$。

定义1.14 设$\mathscr{A}$为一个集族，称由$\mathscr{A}$中全体元素的元素组成的集合为$\mathscr{A}$的广义并集，记作$\cup\mathscr{A}$，称$\cup$为广义并运算符，读作“大并”(Big U)，$\cup\mathscr{A}$的描述法表示为

$$\cup\mathscr{A} = \{x \mid \exists z(z \in \mathscr{A} \wedge x \in z)\}$$

例：设A={{a,b},{c,d},{d,e,f}},则$\cup$**A={a,b,c,d,e,f}**

定义1.15 设$\mathscr{A}$为非空的集族，称由$\mathscr{A}$中全体元素的公共元素组成的集合为$\mathscr{A}$的广义交集，记作$\cap\mathscr{A}$，称$\cap$为广义交运算符，读作“大交”(Big Arch)，$\cap\mathscr{A}$的描述法表示为

$$\cap\mathscr{A} = \{x \mid \forall z(z \in \mathscr{A} \rightarrow x \in z)\}$$

例：设A={{1,2,3}, {1,a,b},{1,6,7}},则$\cap$**A={1}**

广义并、广义交 举例

- 设 $\mathcal{A}_1=\{a,b,\{c,d\}\}$, $\mathcal{A}_2=\{\{a,b\}\}$, $\mathcal{A}_3=\{a\}$,
  $\mathcal{A}_4=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $\mathcal{A}_5=a(a\neq\varnothing)$, $\mathcal{A}_6=\varnothing$, 则

$\cup\mathcal{A}_1= a\cup b\cup\{c,d\}$, $\cap\mathcal{A}_1= a\cap b\cap\{c,d\}$,

$\cup\mathcal{A}_2=\{a,b\}$, $\cap\mathcal{A}_2=\{a,b\}$,

$\cup\mathcal{A}_3=a$, $\cap\mathcal{A}_3=a$

$\cup\mathcal{A}_4=\varnothing\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$, $\cap\mathcal{A}_4=\varnothing\cap\{\varnothing\}=\varnothing$,

$\cup\mathcal{A}_5= \cup a$, $\cap\mathcal{A}_5= \cap a$

$\cup\mathcal{A}_6=\varnothing$, $\cap\mathcal{A}_6=E$ (或者无定义)

运算的优先级

- 第一类运算：绝对补，求幂集，广义并，广义交
  - 按由右到左的顺序进行
- 第二类运算：并，交，相对补，对称差
  - 往往由括号决定，按左向右的顺序进行

有穷集合的计算——包含排斥原理 (Inclusion-Exclusion Principle)

- 设A_1，A_2，…，A_n为n个集合，则

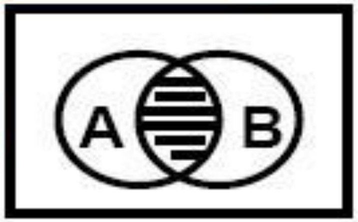
$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \bigcap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \bigcap A_j \bigcap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \bigcap A_2 \bigcap \dots \bigcap A_k|$$

此定理称为包含排斥原理，简称容斥定理

容斥原理(证明)

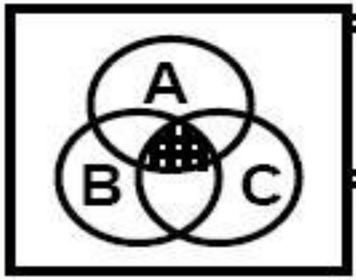
- **n=2**时的情况:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$



- 归纳证明: 以**n=3**为例:

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C| &= |(A\cup B)\cup C| = |A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C| \\
&= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)| \\
&= |A|+|B|-|A\cap B|+|C| \\
&\quad -(|A\cap C|+|B\cap C|-|(A\cap C)\cap(B\cap C)|) \\
&= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C| \\
&\quad +|A\cap B\cap C|
\end{aligned}
$$



容斥定理的应用

[例1.1] 在1到10000之间既不是某个整数的平方，也不是某个整数的立方的数有多少个？

解：设 $E=\{x\in N|1\le x\le 10000\}$, $|E|=10000$

$A=\{x\in E|x=k^2\wedge k\in Z\}$, $|A|=100$

$B=\{x\in E|x=k^3\wedge k\in Z\}$, $|B|=21$

则 $|\sim(A\cup B)|=|E|-|A\cup B|$

$=|E|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$

$=10000-100-21+4=9883$

注意 $A\cap B=\{x\in E|x=k^6\wedge k\in Z\}$, $|A\cap B|=4$. #

[例1.2] 对24名科技人员进行掌握外语情况的调查，统计资料如下：会说英、日、德、法语的人数分别为13，5，10，9。其中同时会说英语、日语的人数为2，同时会说英语、德语、或同时会说英语、法语，或同时会说德语、法语两种语言的人数均为4，会说日语的人既不会说法语也不会德语，试求只会说一种语言的人数各为多少？又同时会说英、德、法语的人数为多少？

解：设 $E=\{x|x$ 是24名科技人员之一$\}$，$|E|=24$

$A=\{x\in E|x$ 会说英语$\}$，　$B=\{x\in E|x$ 会说日语$\}$，

$C=\{x\in E|x$ 会说德语$\}$　$D=\{x\in E|x$ 会说法语$\}$，

已知：

$|A\cup B\cup C\cup D| = 24$， $|A|=13$, $|B|=5$, $|C|=10$, $|D|=9$,
$|A\cap B| =2$, $|A\cap C| = |A\cap D|= |C\cap D| = 4$,

$|B\cap C|= |B\cap D|=|A\cap B\cap C|=|A\cap B\cap D|=|B\cap C\cap D|$

$=| A\cap B\cap C\cap D| =0$, $|A\cup B\cup C\cup D| = 24$

$|A\cup B\cup C\cup D|$

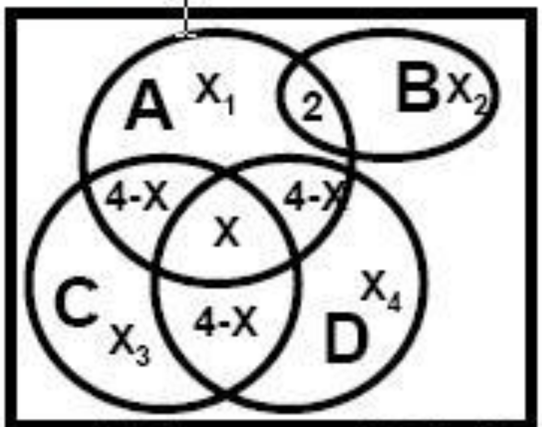
$= |A|+|B|+|C| +|D| -|A\cap B|-|A\cap C| -|A\cap D| -|B\cap C| - |B\cap D|$
$- |C\cap D| +|A\cap B\cap C|+ |A\cap B\cap D|+ |B\cap C\cap D| + |A\cap C\cap D|$
$- |A\cap B\cap C\cap D|$

把已知代入上面公式可得：**$|A\cap C\cap D| = 1$**

设只会说英日德法语的人数分别为**x1,x2,x3,x4**，则

$x1=|A|-|(B\cup C\cup D)\cap A|= |A|-|(B\cap A)\cup(C\cap A)\cup(D\cap A)|=4$, $x2=3$, $x3=3$, $x4=2$ **#**

- 解(续): 设所求人数分别为x_1,x_2,x_3,x_4,x(如图),



$A=\{x\in E|x$会说英语$\}$, $|A|=13$

$B=\{x\in E|x$会说日语$\}$, $|B|=5$

$C=\{x\in E|x$会说德语$\}$, $|C|=10$

$D=\{x\in E|x$会说法语$\}$, $|D|=9$

首先, $x_2=|B|-|A\cap B|=5-2=3$,

其次,对A,C,D用容斥原理, 注意$|E|=24$:

$$24-3=21=13+10+9-4-4-4+x=20+x,\ 得x=1,$$

最后, $x_1=|A|-|A\cap B|-3-3-1=13-2-7=4$, 同理

$$x_3=10-3-3-1=3,\ x_4=9-3-3-1=2. \quad \#$$

小结

- $\in$ $\varnothing$ **E** $\subseteq$ $\subset$ $=$
- $\cap$ $\cup$ $-$ $\oplus$ $\sim$ **P( )**

作业

- P20: 3， 6， 8， 10

  P21: 13， 16