



二部图中的匹配



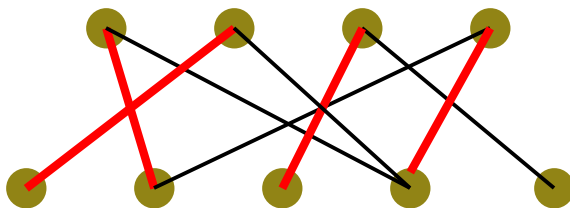


内容提要

- 完备匹配
 - 充要条件: Hall-条件 (相异性条件)
 - 充分条件: t-条件
- k正则二部图
- 无孤立点二部图

完备匹配

- 二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, $|V_1| \leq |V_2|$,
 M 是匹配 $\wedge |M| = |V_1|$

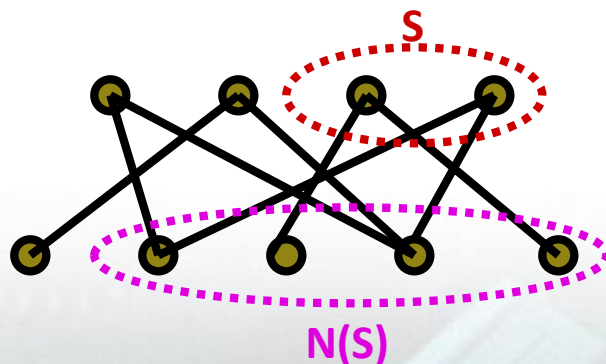


霍尔条件

- 又称“相异性条件”：

$$\forall S \subseteq V_1, |S| \leq |N(S)|$$

- $N(S) = \{ u \mid \exists v \in S, (v, u) \in E \} = \cup_{v \in S} \Gamma(v)$





霍尔定理(婚姻定理)

- 定理13.11(Hall,1935):

二部图 G 有完备匹配 $\Leftrightarrow G$ 满足霍尔条件
($\forall S, |S| \leq |N(S)|$)

霍尔定理证明

• 证: (\Rightarrow) 显然

(\Leftarrow) 反证法。设 M 为最大匹配，假设 M 不是完备匹配。必存在 $v_x \in V_1$ 为非饱和点，且必存在边 $e \in E - M$ 与 v_x 关联(否则与hall条件矛盾)，且 $v_y \in N(v_x)$ 为饱和点(否则不是最大匹配)。

考虑 v_x 出发的所有交错路径，都不是可增广的。

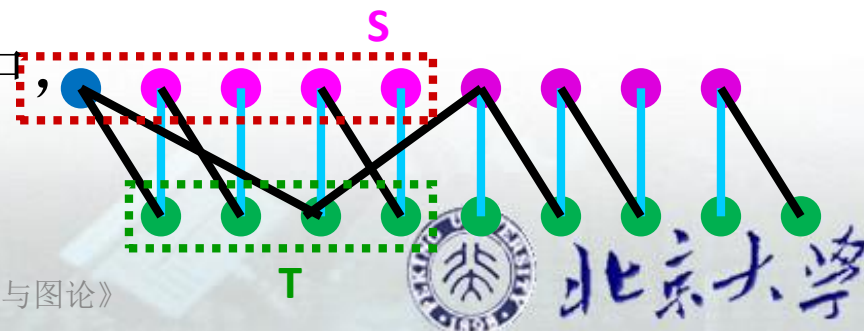
$S = \{v \mid v \in V_1, \text{且} v \text{在交错路径上}\}$,

$T = \{v \mid v \in V_2, \text{且} v \text{在交错路径上}\}$ 。

由于各路径起点和终点都在 S 中，

$|S| = |T| + 1, T = |N(S)| < |S|$

与Hall条件矛盾！

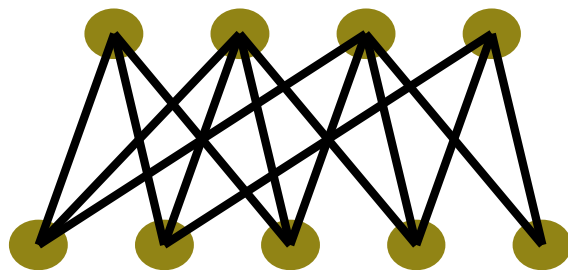


t-条件

- 二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, $t \geq 1$

V_1 中每个顶点至少关联 t 条边 \wedge

V_2 中每个顶点至多关联 t 条边



$t=3$



定理13.12

- 设 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ 是二部图, 则

G 满足 t -条件 $\Rightarrow G$ 中存在完备匹配

定理13.12证明

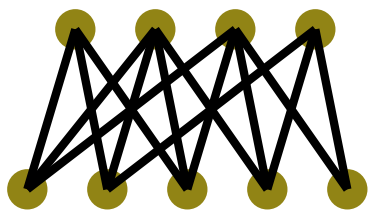
• 证:

V_1 中任意 k 个顶点至少关联 kt 条边,
这 kt 条边至少关联 V_2 中 k 个顶点,
即相异性条件成立. #

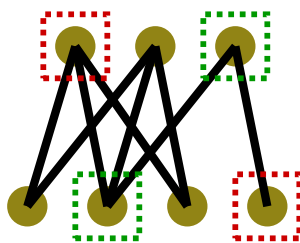


例

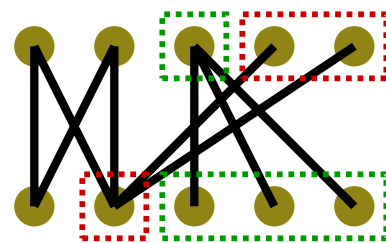
- (1) 满足 t -条件 ($t=3$) (也满足Hall-条件)
- (2) 满足Hall-条件 (但不满足 t -条件)
- (3) 不满足Hall-条件 (无完备匹配)



(1)



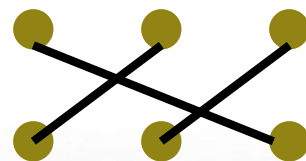
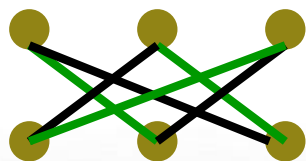
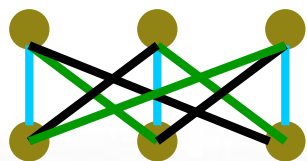
(2)



(3)

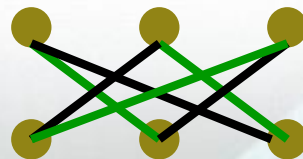
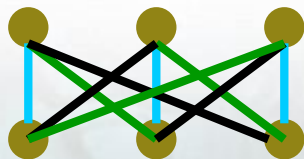
定理13.13 (k -正则二部图)

- k -正则二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 中,
存在 k 个边不重的完美匹配



定理13.13证明

- **证**: G 满足 $t=k$ 的 t 条件, 所以有完备匹配 M_1 , 又 $|V_1|=|V_2|$, 所以完备匹配就是完美匹配. $G-M_1$ 是 $(k-1)$ -正则二部图, 又有完美匹配 M_2 , $G-M_1-M_2$ 是 $(k-2)$ -正则二部图, ……
一共可得 k 个完美匹配.
显然这些匹配是边不重的. #



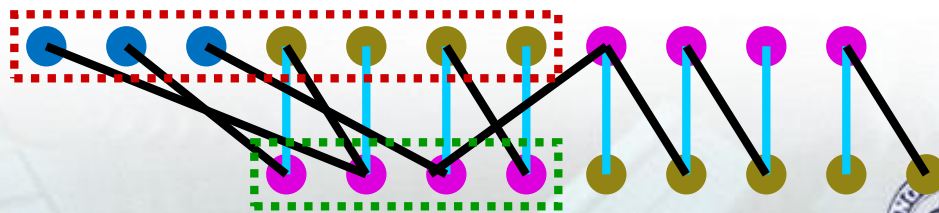
定理13.14(无孤立点二部图)

- 无孤立点二部图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ 中,

$$\alpha_0 = \beta_1$$

定理13.14证明

- 证: 设 M 是最大匹配, X 是 V_1 非饱和点集,
 $S = \{ u \in V_1 \mid \exists v \in X, \text{从 } v \text{ 到 } u \text{ 有交错路径} \},$
 $T = \{ u \in V_2 \mid \exists v \in X, \text{从 } v \text{ 到 } u \text{ 有交错路径} \}.$
则 $N = (V_1 - S) \cup T$ 是点覆盖, $|N| = |M|,$
由定理13.6知 N 是最小覆盖. #





小结

- 完备匹配
 - 充要条件: Hall-条件 (相异性条件)
 - 充分条件: t-条件
- k正则二部图
 - 有k个边不重完美匹配
- 无孤立点二部图
 - $\alpha_0 = \beta_1$