第13章

- 支配集,点独立集,点覆盖集,团
- 边覆盖, 边独立集(匹配)

内容提要

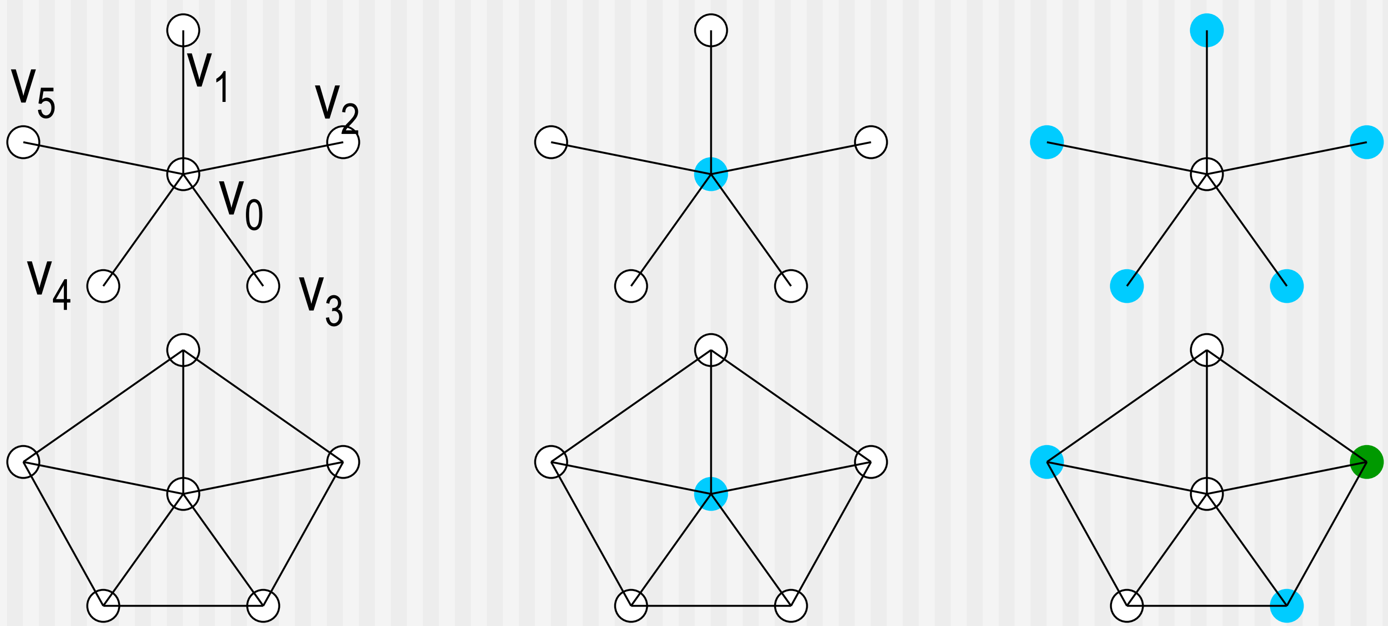
- 支配集
- 点独立集
- 点覆盖集
- 团
- 支配数，点独立数，点覆盖数，团数之间的关系

支配集(dominating set)

- 无向图$G=<V,E>$, $V^*\subseteq V$
- 支配集: $\forall u(u\in V-V^*\rightarrow\exists v(v\in V^*\wedge(u,v)\in E))$
  或 $\forall u\in V-V^*, \exists v\in V^*, uEv$
- 极小支配集: V^*是支配集, 其真子集都不是
- 最小支配集: $|V^*|$最小的支配集
- 支配数: $\gamma_0(G)=|V^*|$, V^*是最小支配集

支配集(例)

- 星形图S_n: $\{v_0\},\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}\}$, $\gamma_0(S_n)=1$
- 轮图W_n: $\{v_0\},\{v_1,v_3,v_5\ldots,v_{n-2}\}$, $\gamma_0(W_n)=1$

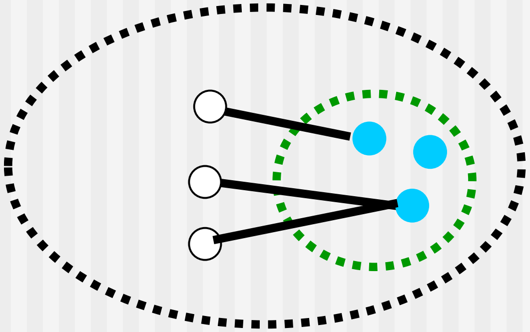


定理13.1

- 定理13.1: 无向图G无孤立点,V_1*是极小支配集,则存在V_2*也是极小支配集,且$V_1^* \cap V_2^* = \varnothing$.
- 证明: V_1*是极小支配集,则$V-V_1$*也是支配集.(反证: 否则, $\exists u \in V_1^*$, $\forall v \in V-V_1^*$, $(u,v) \notin E$, $V_1^*-\{u\}$还是支配集,矛盾.)

  $V-V_1$*是支配集,则$V-V_1$*中有子集是极小支配集,设为V_2*. 则$V_1^* \cap V_2^* = \varnothing$. #

说明: 支配集要包含所有孤立点

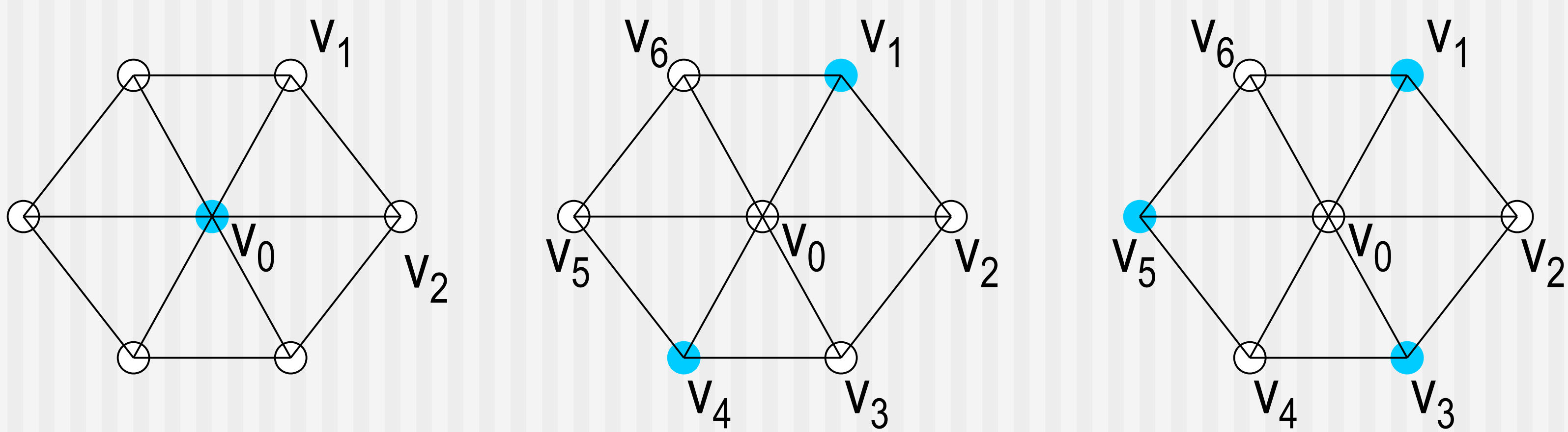


独立集(independent set)

- 无向图G=<V,E>, $V^* \subseteq V$
- 独立集: $\forall u,v \in V^*$, $(u,v) \notin E$
- 极大独立集: V*是独立集, 再加入任何顶点都不再是独立集
- 最大独立集: $|V^*|$最大的独立集
- 独立数: $\beta_0(G)=|V^*|$, V*是最大独立集

独立集(例)

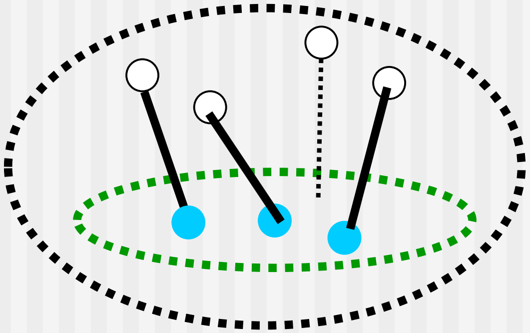
- $\{v_0\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_3, v_5\}$, $\beta_0 = 3$



定理13.2

- 定理13.2: 无向图G~~无孤立点~~,V*是极大独立集,则V*也是极小支配集.
- 证明: V*是极大独立集,则V*也是支配集.(反证: 否则, $\exists u\in V\text{-}V^*$, $\forall v\in V^*$, $(u,v)\notin E$, $V^*\cup\{u\}$还是独立集,矛盾.)

  V*是极小支配集(反证: 否则, $\exists u\in V^*$, $V^*\text{-}\{u\}$是支配集, 则$\exists v\in V^*$, $(u,v)\in E$, 与V*是独立集相矛盾.) #



定理13.2

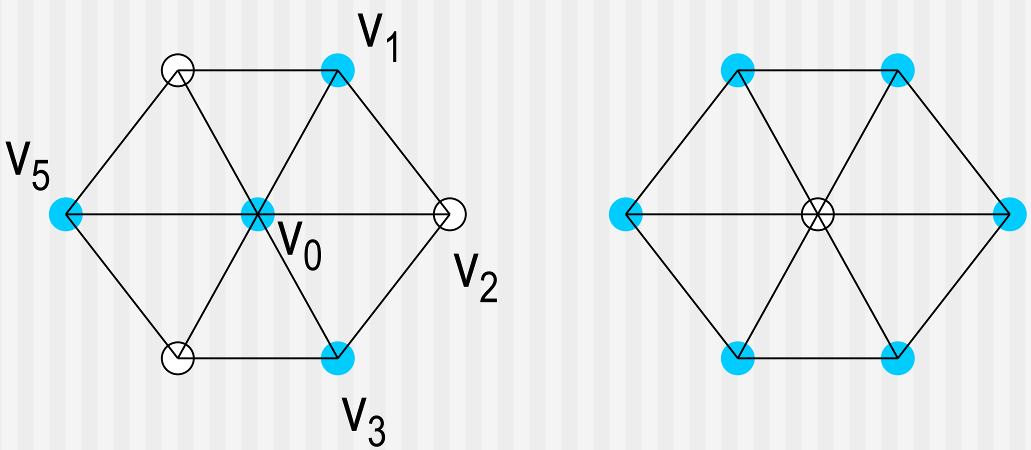
- 定理13.2: 极大独立集是极小支配集
- 逆命题不成立
- 反例: $\{v_2,v_3\}$是极小支配集,但不是独立集,更不是极大独立集
- $\gamma_0 \le \beta_0$
  - 极大独立集小于最大独立集
  - 极小支配集大于最小支配集

点覆盖(vertex cover)

- 无向图$G=<V,E>$, $V^*\subseteq V$
- 点覆盖: $\forall e(e\in E\rightarrow\exists v(v\in V^*\wedge v$关联$e))$
  或 $\forall e\in E, \exists v\in V^*, v$关联$e$
- 极小点覆盖: V^*是点覆盖, 其真子集都不是
- 最小点覆盖: $|V^*|$最小的点覆盖
- 点覆盖数: $\alpha_0(G)=|V^*|$, V^*是最小点覆盖

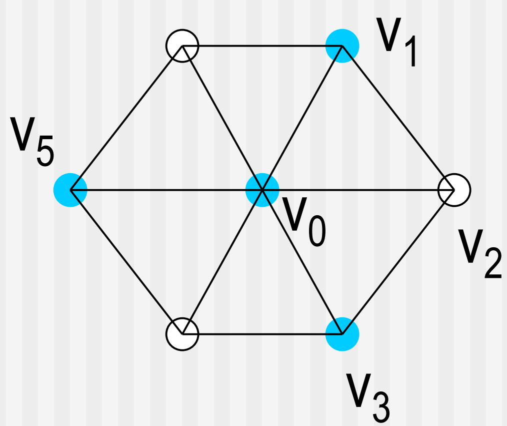
点覆盖(例)

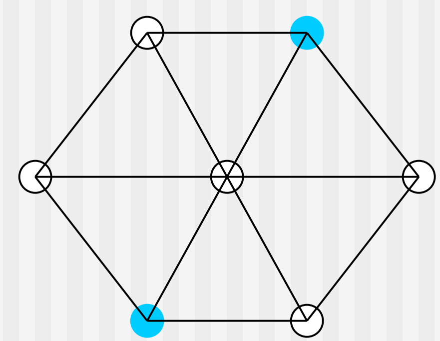
- $\{v_0,v_1,v_3,v_5\}$, $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $\alpha_0=4$



讨论

- (连通图)点覆盖是支配集
- 极小点覆盖不一定是极小支配集.例: $\{v_0,v_1, v_3,v_5\}$是极小点覆盖, $\{v_1,v_3,v_5\}$是极小支配集
- 支配集不一定是点覆盖. 反例: $\{v_1,v_4\}$是支配集,不是点覆盖





定理13.3

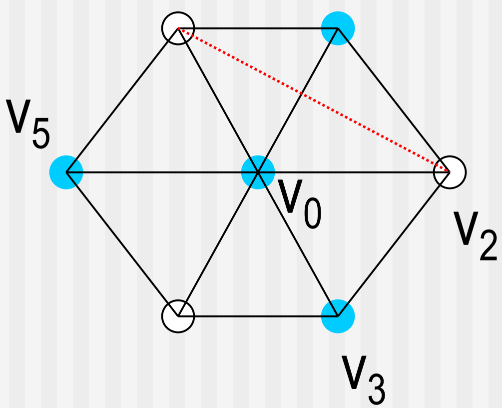
- 定理13.3: 无向图G无孤立点, $V^*\subset V$,

  V^*是点覆盖 $\Leftrightarrow$ $V-V^*$是独立集.

- 证明:

  ($\Rightarrow$) (反证) 否则, $\exists u,v\in V-V^*$, $(u,v)\in E$, V^*不是点覆盖, 矛盾.

  ($\Leftarrow$) $V-V^*$是独立集, $\forall(u,v)\in E$, 两个点不能同时在$V-V^*$中， $u\notin V-V^* \vee v\notin V-V^*$, $u\in V^* \vee v\in V^*$, V^*是点覆盖. #



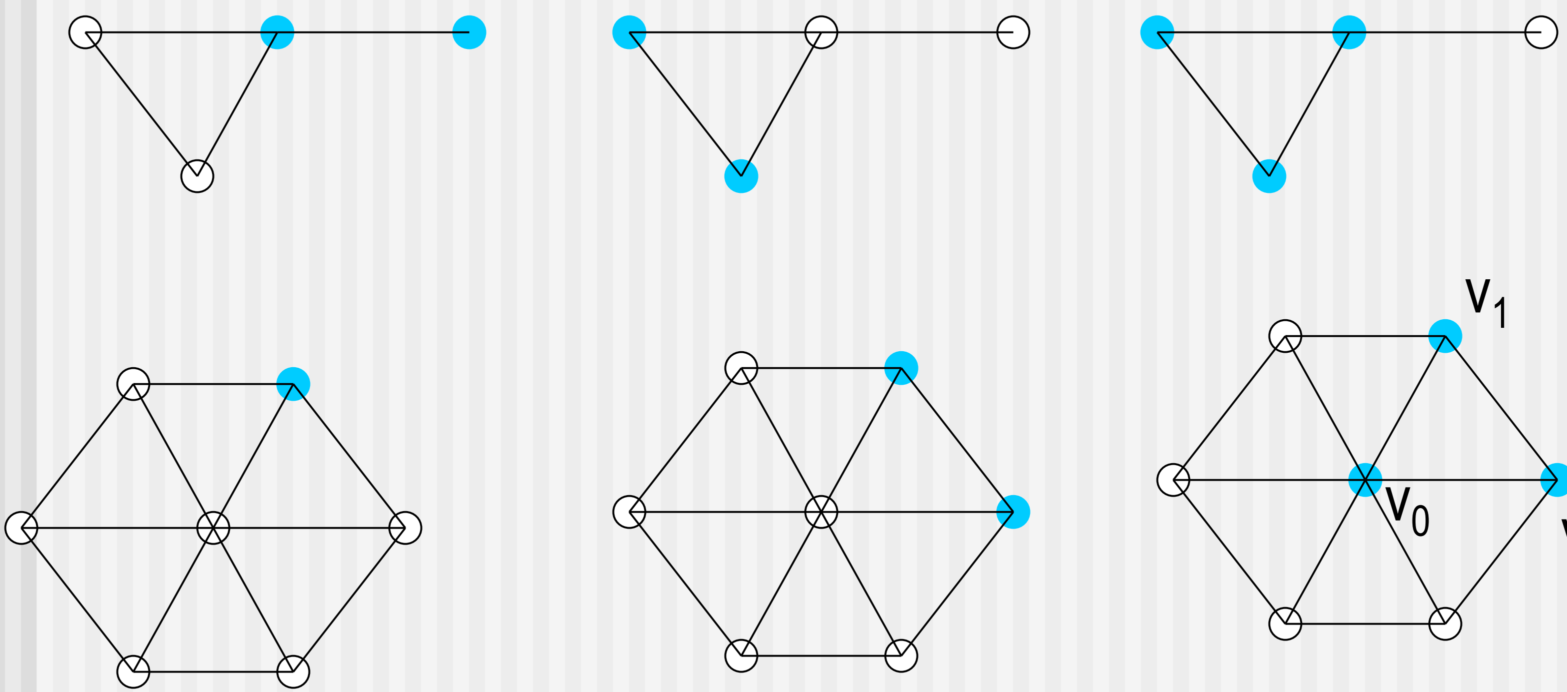
- 推论: 无向图G无孤立点, V*是极(最)小点覆盖⇔V-V*是极(最)大独立集.$\alpha_0+\beta_0=n$.#

团(clique)

- 无向图G=<V,E>, $V^* \subseteq V$
- 团: G[V*]是完全子图
- 极大团: V*是团, 加入任何顶点不是团
- 最大团: |V*|最大的团
- 团数: $\nu_0(G)=|V^*|$, V*是最大团

团(例)

- $\{v_0,v_1,v_2\}$, $\{v_1,v_2\}$, $\{v_1\}$, $\nu_0=3$



定理13.4

- 定理13.4: 无向图G,

  V*是G的团 $\Leftrightarrow$ V*是$\overline{G}$的独立集. #

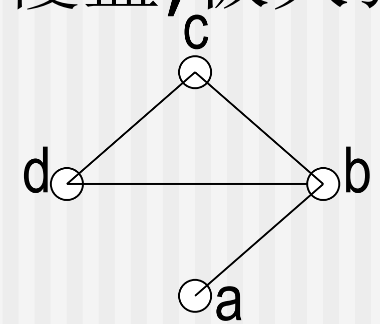
- 推论: 无向图G, V*是G的极(最)大团$\Leftrightarrow$V*是$\overline{G}$的极(最)大独立集. $\nu_0(G)=\beta_0(\overline{G})$. #

α_0 β_0 γ_0 ν_0

- 极大独立集是极小支配集
- $\gamma_0 \le \beta_0$
- $\alpha_0+\beta_0=n$ (无孤立点).
- $\nu_0(G)=\beta_0(\overline{G})$.
- α_0, β_0, ν_0三者互相确定, 但都是难解的(目前都没有多项式时间算法)

例13.1

- 例13.1: 求全体极小支配集,极小点覆盖,极大独立集



- 解: (1)极小支配集.

$\Pi_{v\in V}(v+\Sigma_{u\in\Gamma(v)}u)$

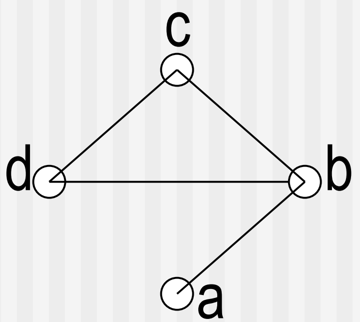
$=(a+b)(b+a+c+d)(c+b+d)(d+c+b)$

$=ac+ad+b$. (幂等: $a+a=a, a\bullet a=a$, 逻辑加乘)

{a,c}, {a,d}, {b}是全体极小支配集. $\gamma_0=1$.

例13.1(续)

- 例13.1: 求全体极小支配集,极小点覆盖,极大独立集
- 解: (2)极小点覆盖.



$\Pi_{(u,v)\in E}(u+v)$

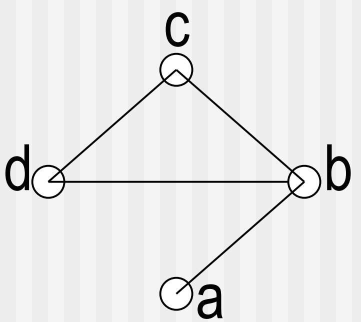
$=(a+b)(b+c)(b+d)(c+d)$

$=bc+bd+acd$. (幂等: $a+a=a, a\bullet a=a$, 逻辑加乘)

{b,c}, {b,d}, {a,c,d}是全体极小点覆盖. $\alpha_0=2$.

例13.1(续)

- 例13.1: 求全体极小支配集,极小点覆盖,极大独立集
- 解: (3)极大独立集.



G无孤立点, V*是极小点覆盖 ⇔ V-V*是极大独立集.

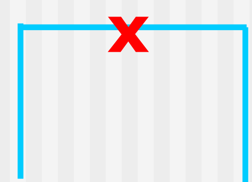
{b,c},{b,d},{a,c,d}是全体极小点覆盖,

{a,d},{a,c},{b}是全体极大独立集.

$\beta_0=2$. #

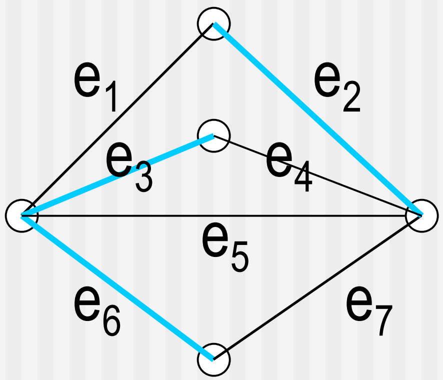
边覆盖(edge cover)

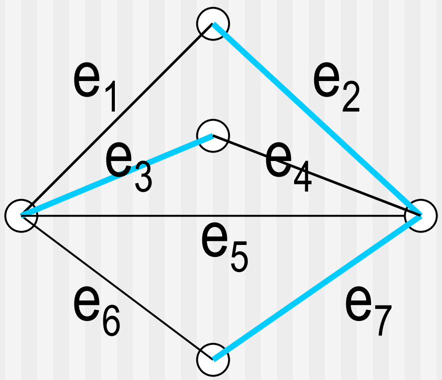
- 无向图G=<V,E>, $E^*\subseteq E$
- 边覆盖: $\forall v\in E$, $\exists e\in E^*$, e关联v
- 极小边覆盖: E*是边覆盖, 其真子集都不是
- 最小边覆盖: |E*|最小的边覆盖
- 边覆盖数: $\alpha_1(G)=|E^*|$, E*是最小点覆盖

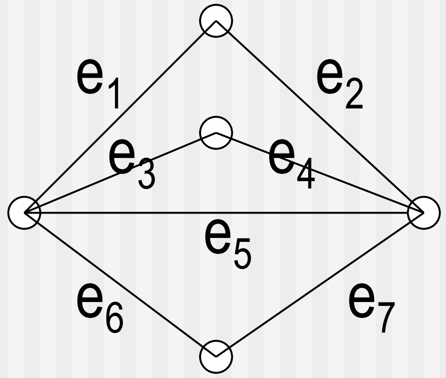


边覆盖(例)

- $\{e_2,e_3,e_6\}$, $\{e_2,e_3,e_7\}$, $\alpha_1=3$





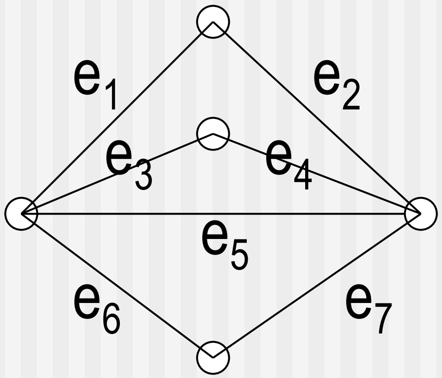


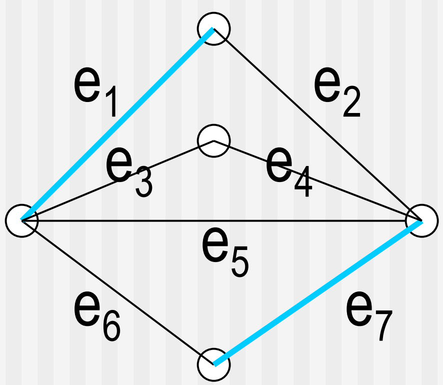
匹配(matching)

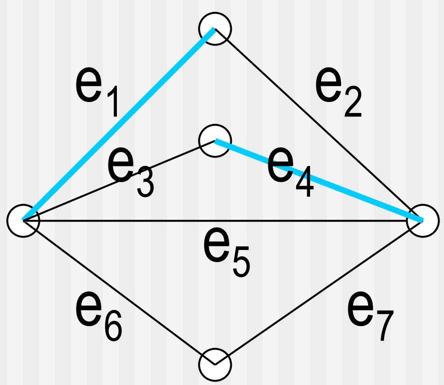
- 无向图G=<V,E>, $E^* \subseteq E$
- 匹配(边独立集): $\forall e,f \in E^*$, e,f不相邻
- 极大匹配: E^*是匹配, 添加任何边都不是
- 最大匹配: $|E^*|$最大的匹配
- 匹配数: $\beta_1(G)=|E^*|$, E^*是最大匹配

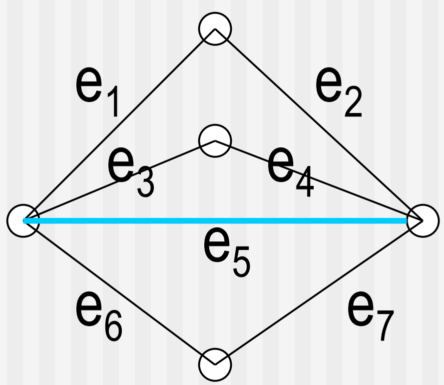
匹配(例)

- $\{e_1,e_7\}$, $\{e_1,e_4\}$,$\{e_2,e_6\}$ $\{e_5\}$,
- $\beta_1=2$





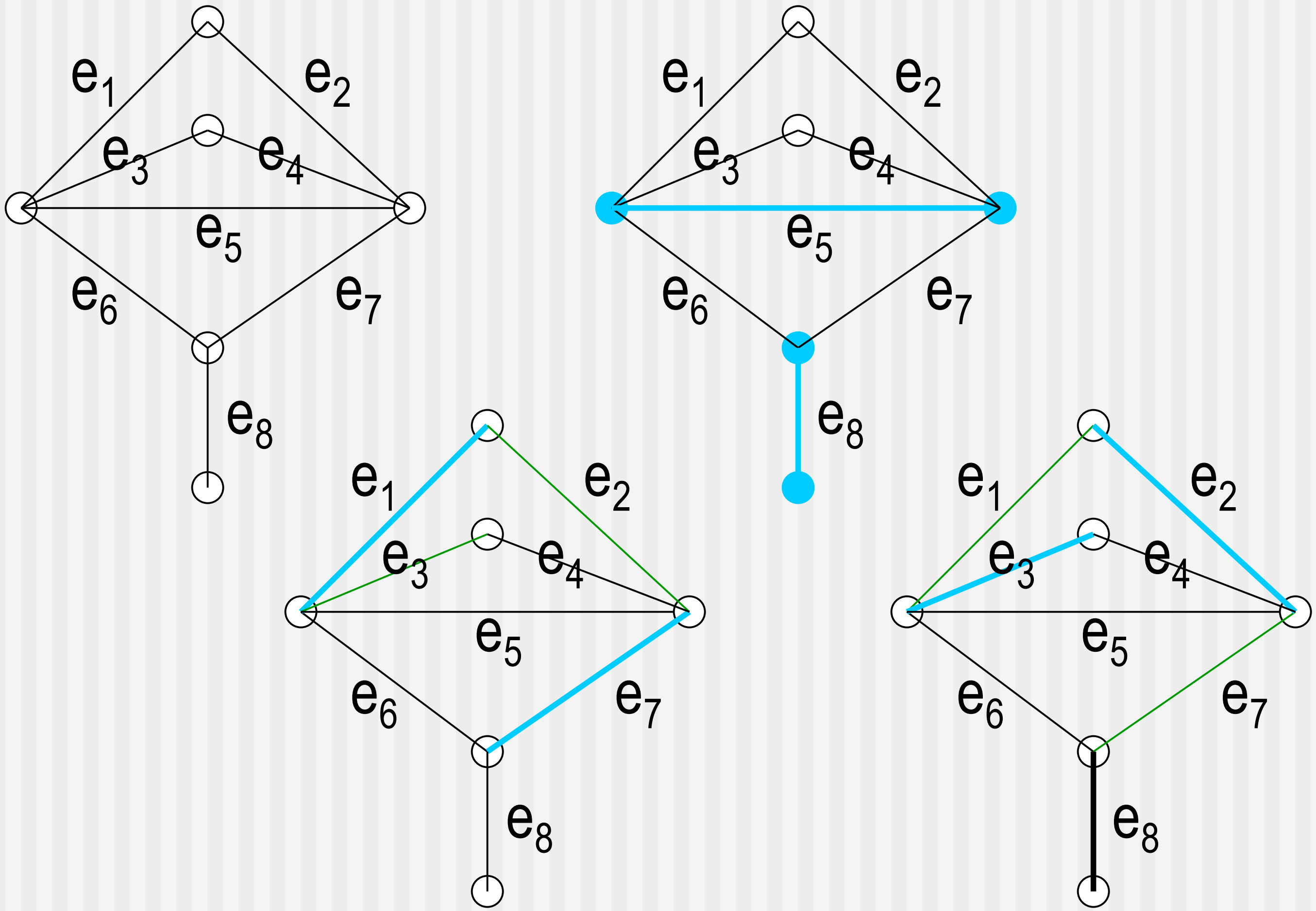




饱和点,交错路径,增广路径

- 设M是G中匹配
- 饱和点：v与M中边关联
- 非饱和点：v不与M中边关联
- 交错路径：在M和E-M中交替取边的路径
- 可增广交错路径：两端都是非饱和点的交错路径

举例



定理13.5

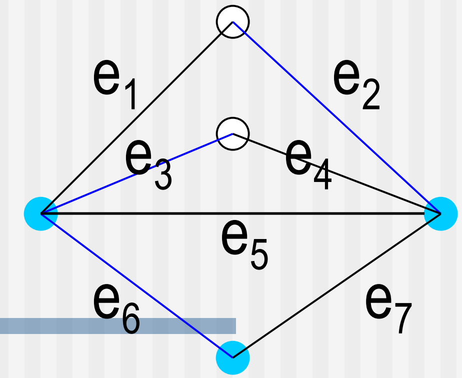
- 定理13.5: 无向图G无孤立点,

(1) 设M是最大匹配, ∀非饱和点v, 取v关联的一边, 组成边集N, 则$W=M\cup N$是最小边覆盖

(2) 设W_1是最小边覆盖, 若W_1中有相邻边, 就删除其中一边, 直到无相邻边为止,设删除的边组成边集N_1, 则$M_1=W_1-N_1$是最大匹配

(3) $\alpha_1+\beta_1=n$

定理13.5(证明)



- 证明: M是最大匹配, $|M|=\beta_1$, $|N|=n-2\beta_1$, $\alpha_1 \le |W|=|M|+|N|=n-\beta_1$.(*)

W_1是最小边覆盖, $|W_1|=\alpha_1$, 因为W_1中任意一条边的两个端点不可能都与其它边相关联，删除1边恰产生1个非饱和点, $|N_1|=|W_1|-|M_1|$=“删除边数”=“M_1的非饱和点数”$=n-2|M_1|$,
$\alpha_1=|W_1|=n-|M_1|\ge n-\beta_1$.(**)

由(*)(**), $n \le \alpha_1+\beta_1 \le n$, 所以$\alpha_1+\beta_1=n$.

由(*), $|W|=\alpha_1$, W是最小边覆盖.

由(**), $|M_1|=\beta_1$, M_1是最大匹配.　#

完美匹配

- 完美匹配(perfect matching): 没有非饱和点的匹配

推论

- 无向图G无孤立点, M是匹配, W是边覆盖, 则 $|M| \le |W|$ 等号成立时, M是完美匹配, W是最小边覆盖.
- 证: 由定理13.5证明(1)可知$\beta_1 \le \alpha_1$,

于是$|M| \le \beta_1 \le \alpha_1 \le |W|$,

当$|M|=|W|$ 时, 得$|M| = \beta_1 = \alpha_1 = |W|$,

因而M是最大匹配, W是最小边覆盖, 再由定理13.5(3)可知$\alpha_1+\beta_1= 2\beta_1= n$,

所以M是完美匹配. #

定理13.6

- 定理13.6: 无向图G无孤立点, M是匹配, N是点覆盖, Y是点独立集, W是边覆盖, 则

  (1) $|M|\le|N|$, (2) $|Y|\le|W|$, (3) 等号成立时, M是最大匹配, N是最小点覆盖, Y是最大独立集, W是最小边覆盖
- 证明: (1) M中边不相邻, 至少需要$|M|$个点才能覆盖M. (2) Y中顶点不相邻, 至少需要$|Y|$条边才能覆盖Y. $|M|=|N|$说明$|M|$达到最大值, $|N|$达到最小值. $|Y|=|W|$类似. #

推论

- 推论: 无向图G无孤立点, 则

  $$\beta_1 \le \alpha_0,\ \ \beta_0 \le \alpha_1. \quad \#$$

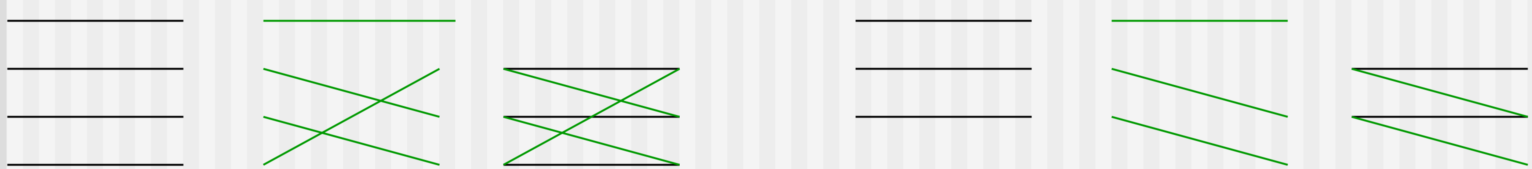
- 完全二部图$K_{r,s}$:

  $\beta_1=\alpha_0=\min\{r,s\}$,

  $\beta_0=\alpha_1=\max\{r,s\}$,

最大匹配

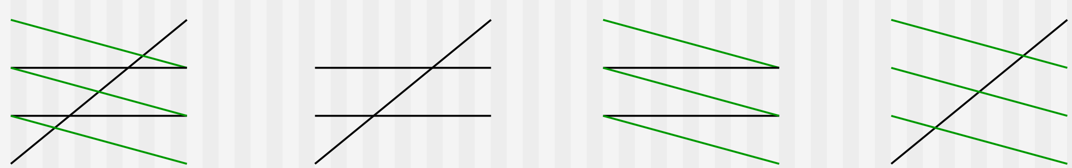
- 定理13.7: 设M_1,M_2是G中2个不同匹配, 则$G[M_1 \oplus M_2]$的每个连通分支是M_1,M_2中的边组成的交错圈或交错路径
- 证明: 设G_1是$G[M_1 \oplus M_2]$的1个连通分支, $\forall v \in V(G_1)$, $0 < d_{G1}(v) = d_{G[M1 \oplus M2]}(v) \le 2$, 即 $d_{G1}(v)=1$或2. 所以G_1是交错圈或交错路径. #



最大匹配

- 定理13.8：设M是G中匹配，Γ是M的可增广路径，则$M'=M\oplus E(\Gamma)$也是G中匹配，且 $|M'|=|M|+1$
- 证明：显然M'是匹配. 由于Γ上非M中的边比M中的边多一条

$|M'|=|M\oplus E(\Gamma)|=|M-E(\Gamma)|+|E(\Gamma)-M|=|M|+1$.   #



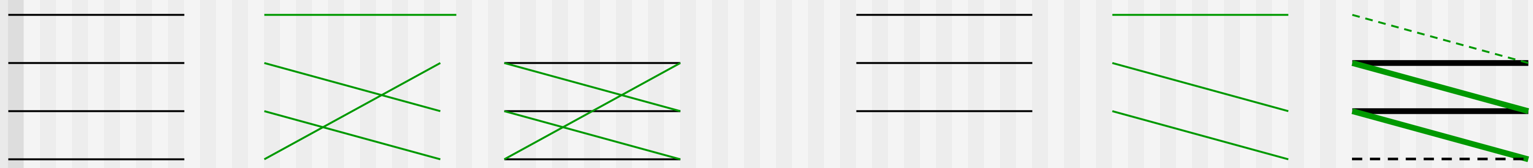
最大匹配

- 定理13.9(Berge,1957):

  M是G中最大匹配⇔G中无M可增广路径

- 证明: (⇒)(反证)定理13.8.

  (⇐)设M_1是G的最大匹配, $H=G[M_1 \oplus M]$. 若$H \neq \varnothing$, H的连通分支是交错圈或交错路径. M和M_1都无可增广路径,在交错圈和交错路径上M和M_1的边都相等. 所以$|M|=|M_1|$. #



托特定理

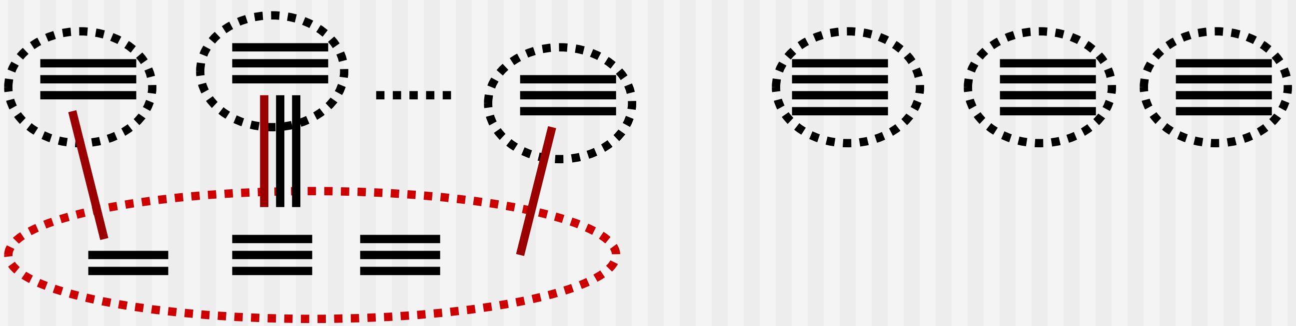
- 定理13.10(Tutte,1947):

$$G\text{有完美匹配} \Leftrightarrow \forall V' \subset V(G),\ p_{\text{奇}}(G-V') \le |V'|.$$

- 说明: $p_{\text{奇}}$是奇数阶连通分支数

托特定理证明(⇒)

- 证: (⇒) 设M是G的完美匹配, $V' \subset V$,
  设G_1是$G-V'$的奇阶连通分支,
  则 $\exists u_1 \in V(G_1)$, $\exists v_1 \in V'$, $(u_1,v_1) \in M$,
  所以 $p_{奇}(G-V') \leq |V'|$.



托特定理证明(⇐)

- 证: (⇐) 反证法 假设G没有完美匹配

由于$\forall V'$， $p_{奇}(G-V')\le|V'|$,

  取$V'=\varnothing$，得G是偶阶,

1) G*为含G作为生成子图的没有完美匹配的边数最多的图

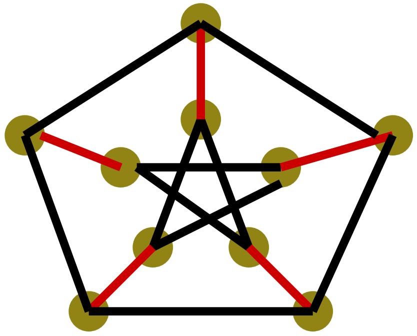
2)$V'=\{v|d_{G*}(v)=n-1\}$

可证明G*-V'是不交完全图之并

可证明G*是完美匹配，矛盾。

托特定理推论

- 无桥 3-正则图有完美匹配



托特定理推论证明

- 证: 对任意V_1, 设$G-V_1$的奇阶连通分支是G_i,

$i=1,2,\ldots,r$, $|V(G_i)|=n_i$(奇数), $|[V(G_i),V_1]|=m_i$.

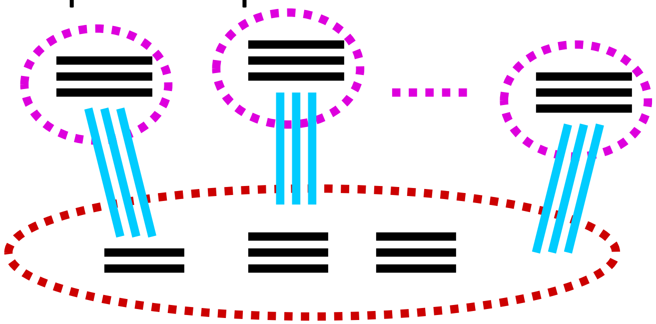
$\Sigma_{v\in V(Gi)} d_G(v) = 3n_i = 2|E(G_i)|+m_i \Rightarrow m_i$是奇数.

无桥 $\Rightarrow m_i \geq 3$.

$p_{奇}(G-V_1) = r$

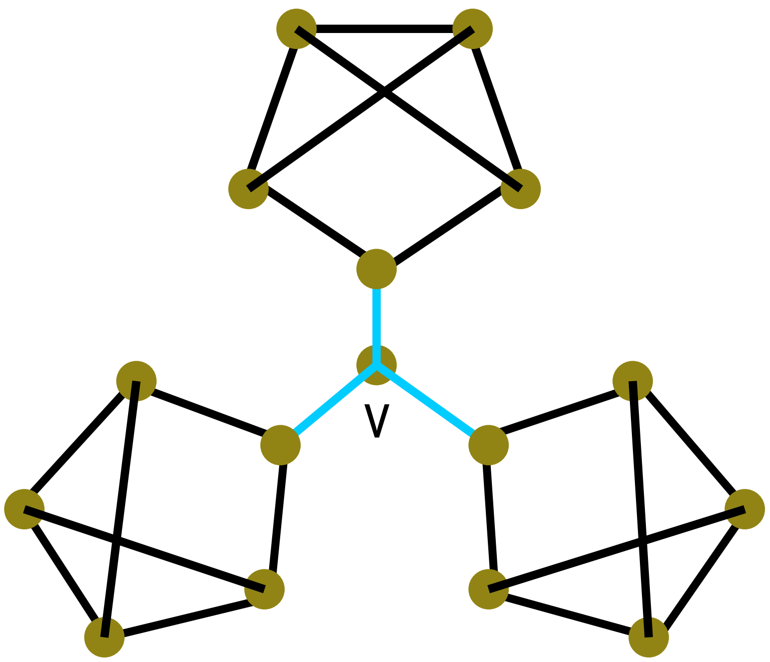
$\leq (\Sigma^r_{i=1} m_i)/3$

$\leq (\Sigma_{v\in V1} d_G(v))/3 = |V_1|$, 再用托特定理. #



无桥条件不能去掉

- 反例:



- $p_{奇}(G-\{v\}) = 3 > |\{v\}| = 1$, 无完美匹配

$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \nu_0, \alpha_1, \beta_1$

- 无向图G无孤立点,
- $\nu_0(G)=\beta_0 \le \alpha_1$(定理13.4推论,13.6推论)
- $n = \alpha_1 + \beta_1$(定理13.5)
- $\beta_1 \le \alpha_1, \alpha_0$(定理13.5, 定理13.6推论)
- α_1, β_1是容易计算的(tractable, easy)

小结

- 边覆盖，极小（最小）边覆盖(易解)
- 匹配，极大（最大）匹配，完美匹配 (易解)
- 饱和点，非饱和点，交错路径
- $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \nu_0, \alpha_1, \beta_1$之间关系
- 匹配存在的充要条件
  - Berge定理: 有最大匹配 $\Leftrightarrow$ 无可增广路径
  - Tutte定理: 有完美匹配 $\Leftrightarrow$ $\forall V'$, $p_{奇}(G-V') \le |V'|$

作业

- P199: 1,3,5,8