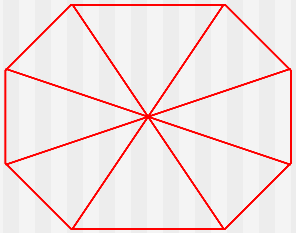
第12章　着色

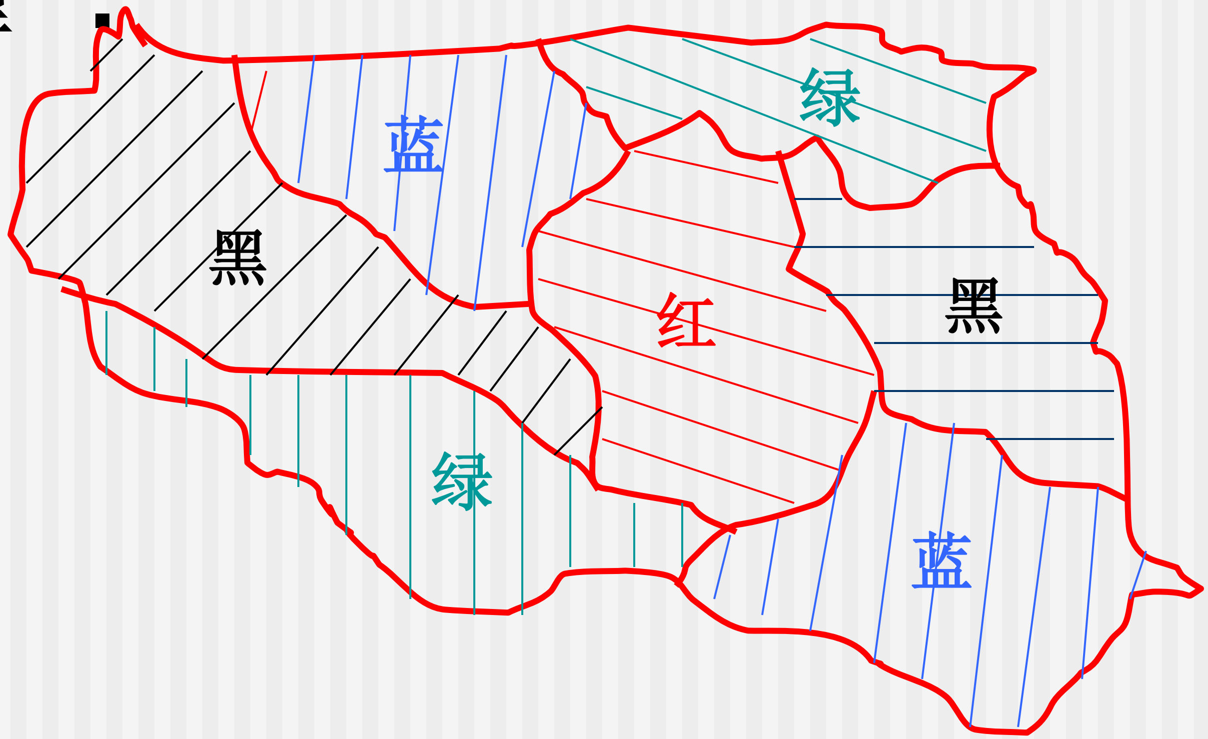
- 着色
  - 点着色与色多项式
  - 地图着色和平面图的点着色
  - 边着色



着色问题起源于对地图着色, 使得相邻(具有相同边界)国家用不同颜色,需要多少种不同的颜色?

- **1852**年,英国数学家格色里(**Guthrie**)提出了"四色猜想".
- **1872**年，英国当时最著名的数学家凯利正式向伦敦数学学会提出了这个问题
- **1879**年肯普(**Kempe**)给出了这个猜想的第一个证明.
- **1890**年,希伍德(**Hewood**)发现肯普的证明是错误的, 可是他指出肯普的方法,虽然不能证明地图着色用四种颜色,但可以证明五种颜色就够了.

- 直到**1976**年美国伊利诺斯**(Illinois)**大学的阿佩尔**(K.Appel)**和哈肯**(W.Haken)**把四色问题归结为**2000**个不同的组合结构图形,利用三台高速**IBM360**计算机对这些图形进行分析用了**1200**机时,近百亿次逻辑判断, 证明了“四色定理”.



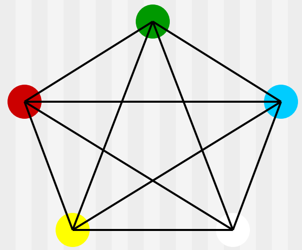
着色

- 给无环图的每个顶点指定**1**种颜色**,** 使得相邻顶点有不同颜色
- 颜色集$C=\{1,2,\ldots,k\}$,

$$f: V \to C,$$

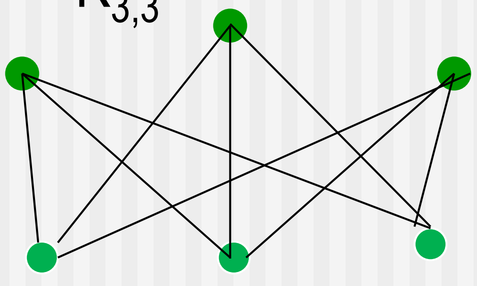
$$\forall u \forall v (\ u,v \in V \wedge u\text{与}v\text{相邻} \to f(u) \neq f(v)\ )$$

- **k-着色:** $|C|=k$



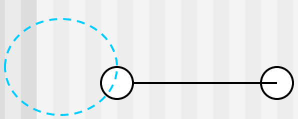
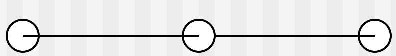
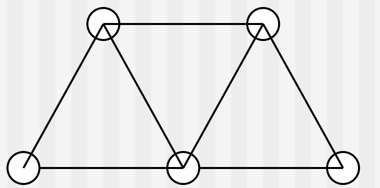
K_5

$K_{3,3}$

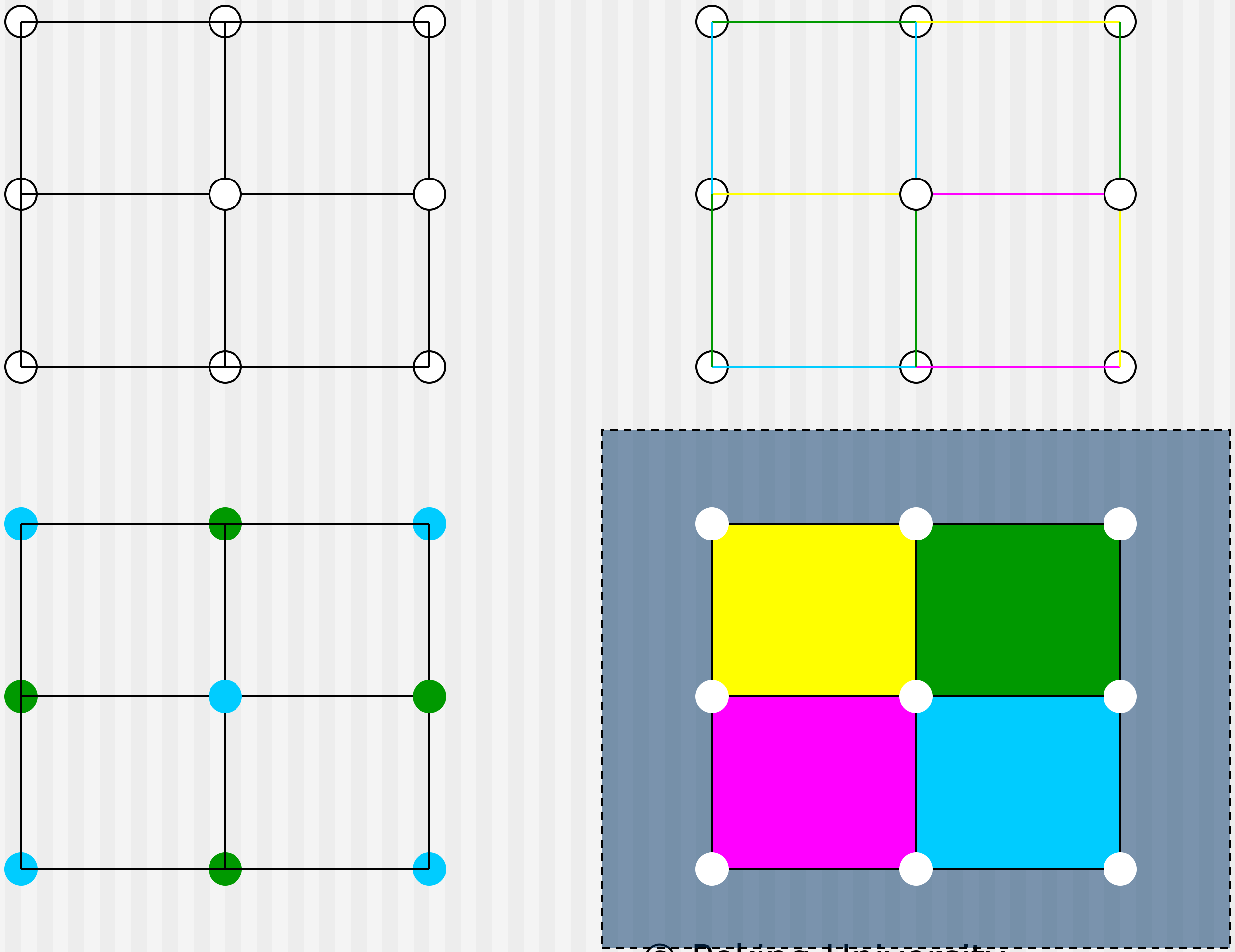


着色(coloring)

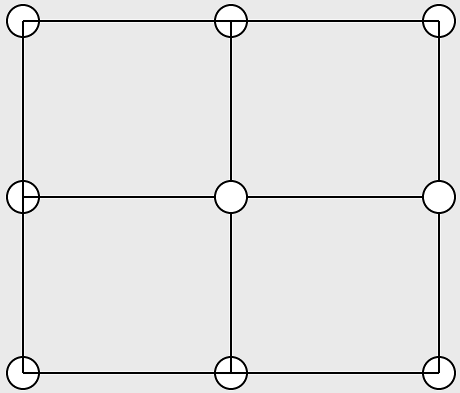
- 用颜色集C给X中元素着色：$f:X\to C$,
  $\forall x\forall y(\ x,y\in X\wedge x$与$y$相邻 $\to f(x)\neq f(y)\ )$
  若$|C|=k$(如$C=\{1,2,\ldots,k\}$), 则称**k-着色**
- **(点)着色,边着色,面着色**: X=V(无环),E,R
- **相邻**:
  - V,有边相连,$(x,y)\in E$;
  - E,有公共端点, $(x,y),(y,z)$;
  - R,有公共边界

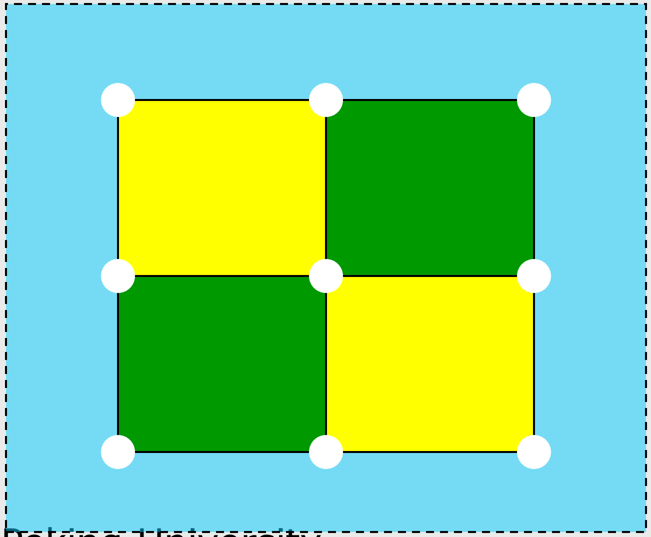




着色(例)



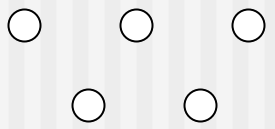
- **k-色图**: 可**k-**着色,但不可**(k-1)-**着色
- **色数(chromatic number)**: 着色所需最少颜色数
- **点**色数χ**(G)**, **边**色数χ'**(G)**, **面**色数χ***(G)**
- **例**: χ(G)=2, χ'(G)=4, χ*(G)=3

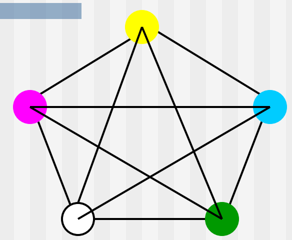




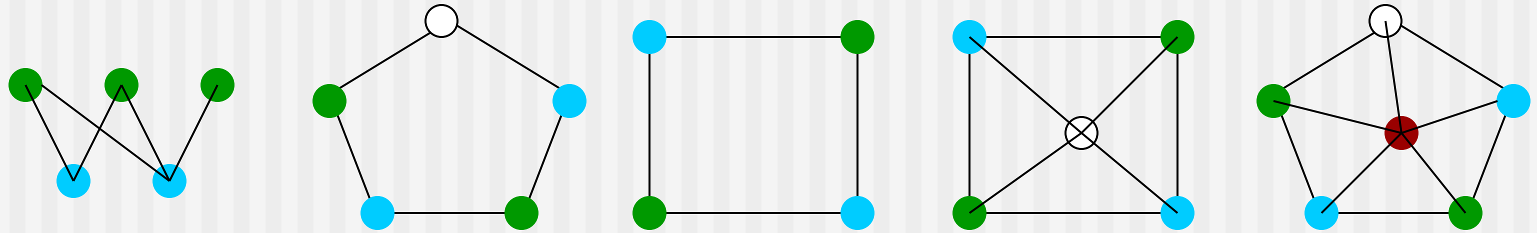
点色数性质

- $\chi(G)=1 \Leftrightarrow$ G是零图

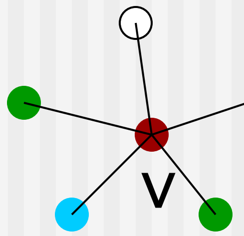




- $\chi(K_n)=n$
- $\chi(G)=2 \Leftrightarrow$ G是非零图二部图
- G可2-着色 $\Leftrightarrow$ G是二部图 $\Leftrightarrow$ G无奇圈
- $\chi(C_n)=\begin{cases} 2, & n\text{偶数} \\ 3, & n\text{奇数} \end{cases}$ $\chi(W_n)=\begin{cases} 3, & n\text{奇数} \\ 4, & n\text{偶数} \end{cases}$



$\chi(G)$上界



- 定理12.5: $\chi(G) \le \Delta(G)+1$

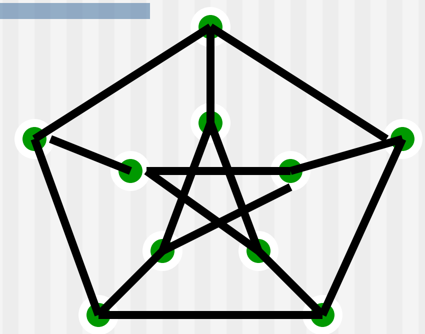
证: (归纳法)n=1,结论成立.

设n=k结论成立,设G的阶数为k+1,
$\forall v \in V(G)$, $G_1=G-v$, G_1的阶数为k,则
$\chi(G_1) \le \Delta(G_1)+1 \le \Delta(G)+1$,当$G_1$还原成G时,v至多与$\Delta(G)$个顶点相邻,而$G_1$中, $\Delta(G)$个顶点至多用了$\Delta(G)$种颜色,则$\Delta(G)+1$种颜色中至少存在一种颜色给v着色,使v与相邻顶点均着不同的颜色.
#

Brooks定理

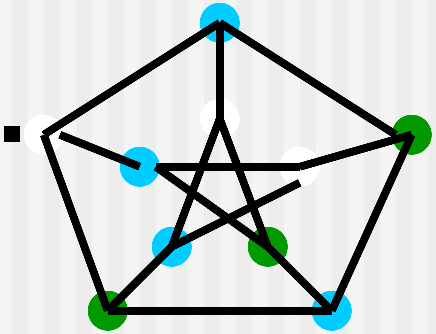
- 定理12.6(Brooks): 连通图G不是完全图 K_n ($n \ge 3$)也不是奇圈, 则$\chi(G) \le \Delta(G)$. #
- 说明: $G=K_1$: $\chi(G)=1 > \Delta(G)=0$
  $G=K_2$: $\chi(G)=2 > \Delta(G)=1$
  $G=K_n$: $\chi(G)=n > \Delta(G)=n-1$
  $G=C_{2k+1}$: $\chi(G)=3 > \Delta(G)=2$

例12.1



- Petersen图, $\chi=3$.

- 解1: 由Brooks定理, $\chi\le\Delta=3$.
  又图中有奇圈, $\chi\ge3$.
  所以$\chi=3$. #



- 解2: 存在如下3-着色, $\chi\le\Delta=3$.
  又图中有奇圈, $\chi\ge3$.
  所以$\chi=3$. #

定理12.7

- 定理12.7: 对图G进行$\chi(G)$-着色,设 $V_i=\{v|v\in V(G)\wedge v$着颜色$i\}$, $i=1,2,\ldots,\chi(G)$, 则$\Pi=\{V_1,V_2,\ldots,V_{\chi(G)}\}$是$V(G)$的划分. #

- 定理12.7':对图G进行$\chi(G)$-着色,设 $R=\{\langle u,v\rangle \mid u,v\in V(G)\wedge u,v$着同样颜色$\}$, 则R是$V(G)$上等价关系. #

色多项式

- 不同的着色：至少有一个顶点的着色不同
- 色多项式

  $f(G,k)$=图G的不同的k-着色的总数

- 完全图

$f(K_n,k)=k(k-1)\ldots(k-n+1)=f(K_{n-1},k)(k-n+1)$

- 零图 $f(N_n,k)=k^n$

例12.2

- 求$f(K_n,6)$, $n\geq 2$.

解：$f(K_1,6)=6$,　　$f(K_2,6)=6\times 5=30$,

$f(K_3,6)=6\times 5\times 4=120$,

$f(K_4,6)=6\times 5\times 4\times 3=360$,

$f(K_5,6)=6\times 5\times 4\times 3\times 2=720$,

$f(K_6,6)=6!=720$,

$f(K_n,6)=0$, $n\geq 7$.　　#

色多项式的递推公式

- 若(u,v)不是G中的边

$$f(G,k)=f(G\cup(u,v),k)+f(G\setminus(u,v),k)$$

- 若$e=(u,v)$是G中的边

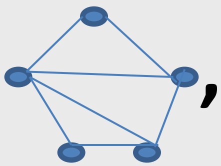
$$f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\setminus e,k)$$

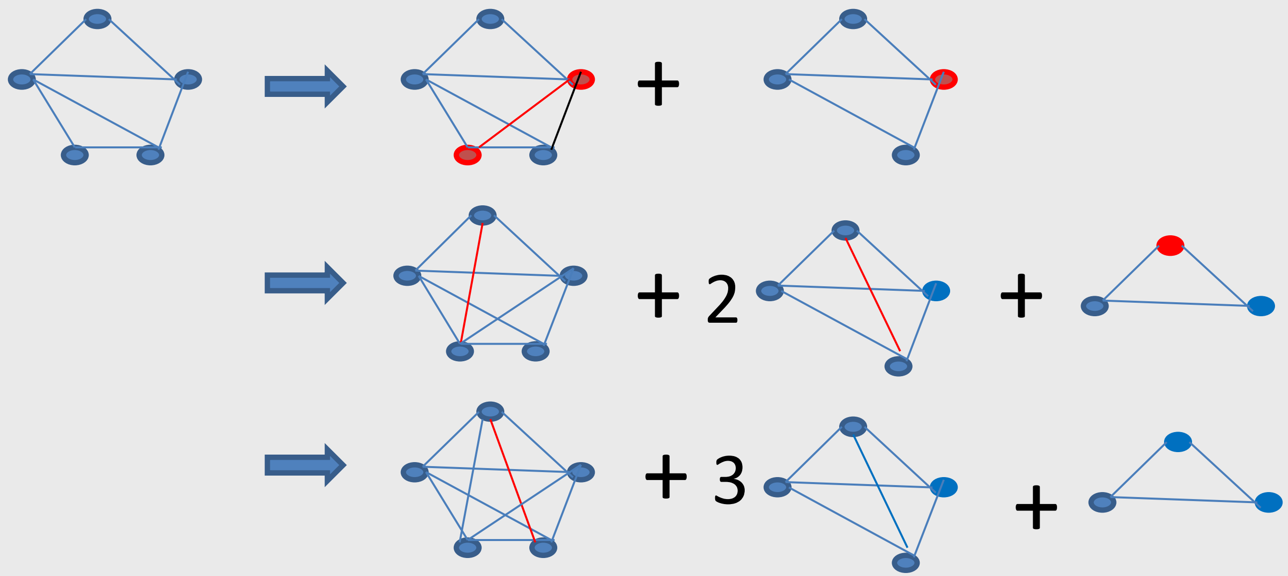
- 推论

$$f(G,k)=f(K_{n1},k)+f(K_{n2},k)+\ldots+f(K_{nr},k),$$

$$\chi(G)=\min\{n_1,n_2,\ldots,n_r\}$$

例12.3

- G= , 求f(G,k).
- 解:



$$f(G,k) = f(K_5,k) + 3f(K_4,k) + f(K_3,k)$$

$$= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k = k(k-1)(k-2)^3.$$

所以$\chi(G) = \min\{5,4,3\} = 3$, 且 $f(G,3)=6$. #

色多项式的性质

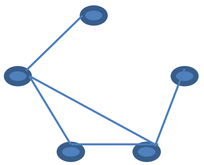
- $f(G,k)$是n次多项式,系数正负号交替
- k^n系数为1, k^{n-1}系数为-m, m为边数, 常数项为0
- 最低非零项为k^p, p为连通分支数
- 不同连通分支相乘
- T是n阶树 $\Leftrightarrow f(T,k) = k(k-1)^{n-1}$. (用归纳法证明)
- C是n阶圈 $\Rightarrow f(C,k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

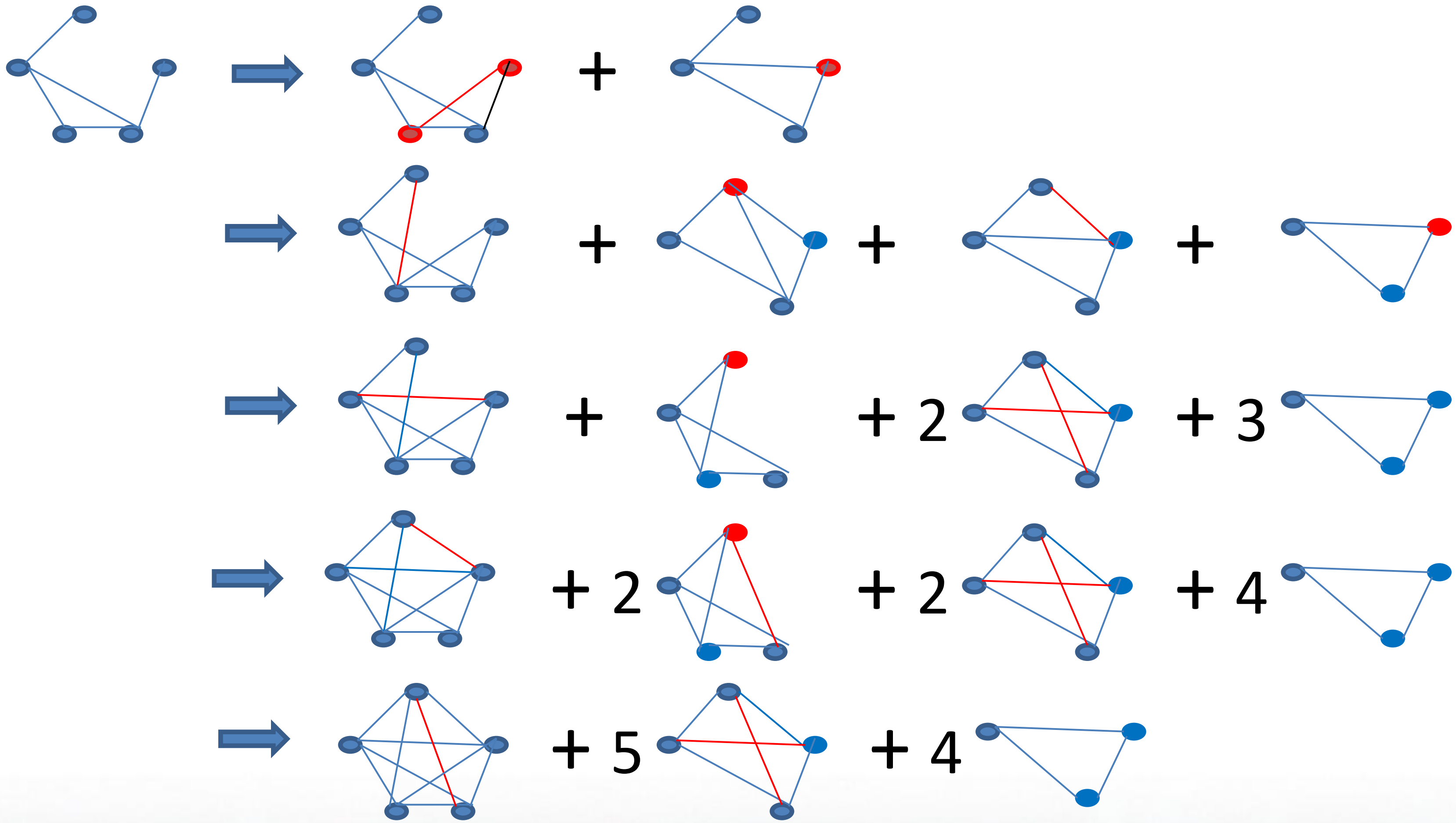
例12.4

- 有n门课程要期末考试，每个学生每天只能参加一门课程的考试，至少需要几天才能考完？在最少天数下最多有几种安排方案？
- 解：以课程为顶点，如果有同一个学生同时选两门课程，则用边连接这两门课程，得到图G.

最少考试天数= $\chi(G)$ ；方案数= $f(G,\chi(G))$。

例12.4(续)

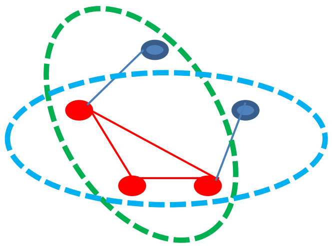
G=




$f(G,k) = k(k-1)^3(k-2) = k^5 - 5k^4 + 9k^3 - 7k^2 + 2k.$

$\chi(G) = 3$, $f(G,3) = 24$. #

定理12.10



- 设V_1是G的点割集，且$G[V_1]$是G的完全子图$K_{|V1|}$，

  若$G-V_1$有p个连通分支$G_1, G_2,\dots, G_p$（$p\geq 2$），

  且$H_i=G[V_1\cup V(G_i)]$，则 $f(G,k)=\frac{\prod_{i=1}^{p} f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)^{p-1}}$.

证: 对$G[V_1]$的每种k着色, H_i有$f(H_i,k)/f(G[V_1],k)$种k着色,

$$f(G,k)=f(G[V_1],k)\prod_{i=1}^{p}\frac{f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)}=\frac{\prod_{i=1}^{p} f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)^{p-1}}. \quad \#$$

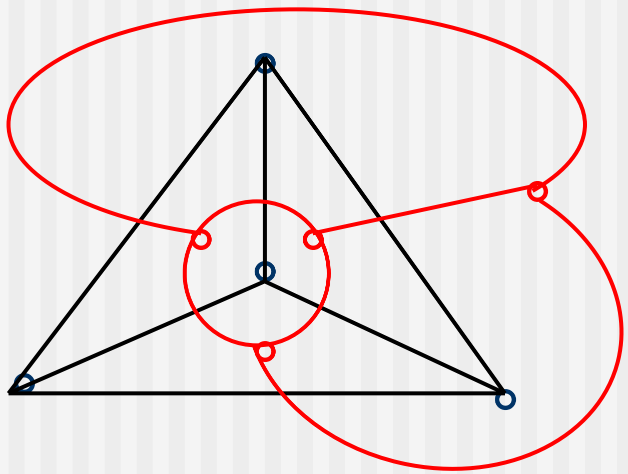
例: $f(G,k) = f(K_3,k)(k-1)^2=k(k-1)^3(k-2)$.

地图着色

- **地图: 连通无桥平面图的平面嵌入及其所有的面称为(平面)地图**
- **国家: 平面地图的面**
- **相邻: 两个国家的公共边界至少有一条公共边**
- **k-面着色:对每个国家涂上一种颜色,使相邻的国家涂不同种颜色,若能用k种颜色给G着色,就称对G的面进行了k着色**
- **k-色地图:k-面可着色, 不是(k-1)-面可着色**
- **面色数$\chi^*(G)$**

平面图着色与对偶图的关系:

对平面图相邻面用不同颜色的着色问题,可以归结到对其对偶图的相邻接的顶点着不同颜色。



面着色与对偶图点着色

- **定理12.13: 地图G可k-面着色 ⇔ 对偶图G*可k-着色.**

证:必要性.给G的一种k-面着色,因为$n^*=r$,即G的每个面中含且只含一个顶点,设v_i^*位于G的面R_i内,将v_i^* 涂R_i的颜色.若v_i^*和v_j^* 相邻,则由于R_i与R_j的颜色不同,所以v_i^*和v_j^* 颜色不同,即G^*是k可着色的.

类似证明充分性。 **#**

面着色与对偶图点着色

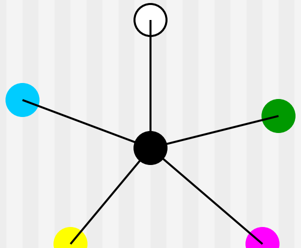
- 定理12.14: 连通无环平面图G可k-可着色 $\Leftrightarrow$ 对偶图G*是k-面可着色. #

- 研究平面图面着色$\Leftrightarrow$研究平面图点着色

六色定理

- **定理12.15**: 任何平面图都是6-可着色
- **证明**: (归纳法) (1) $n<7$: 结论为真.

  (2) 设$n=k(\geq 7)$时结论为真. $n=k+1$时, $\exists v \in V(G)$, $d(v) \leq 5$. 令$G_1=G-v$, 对G_1用归纳假设, G_1可6-着色. 模仿G_1对G着色, 与v相邻的点不超过5个, 至少剩1种颜色给v着色,所以G可6-着色. #

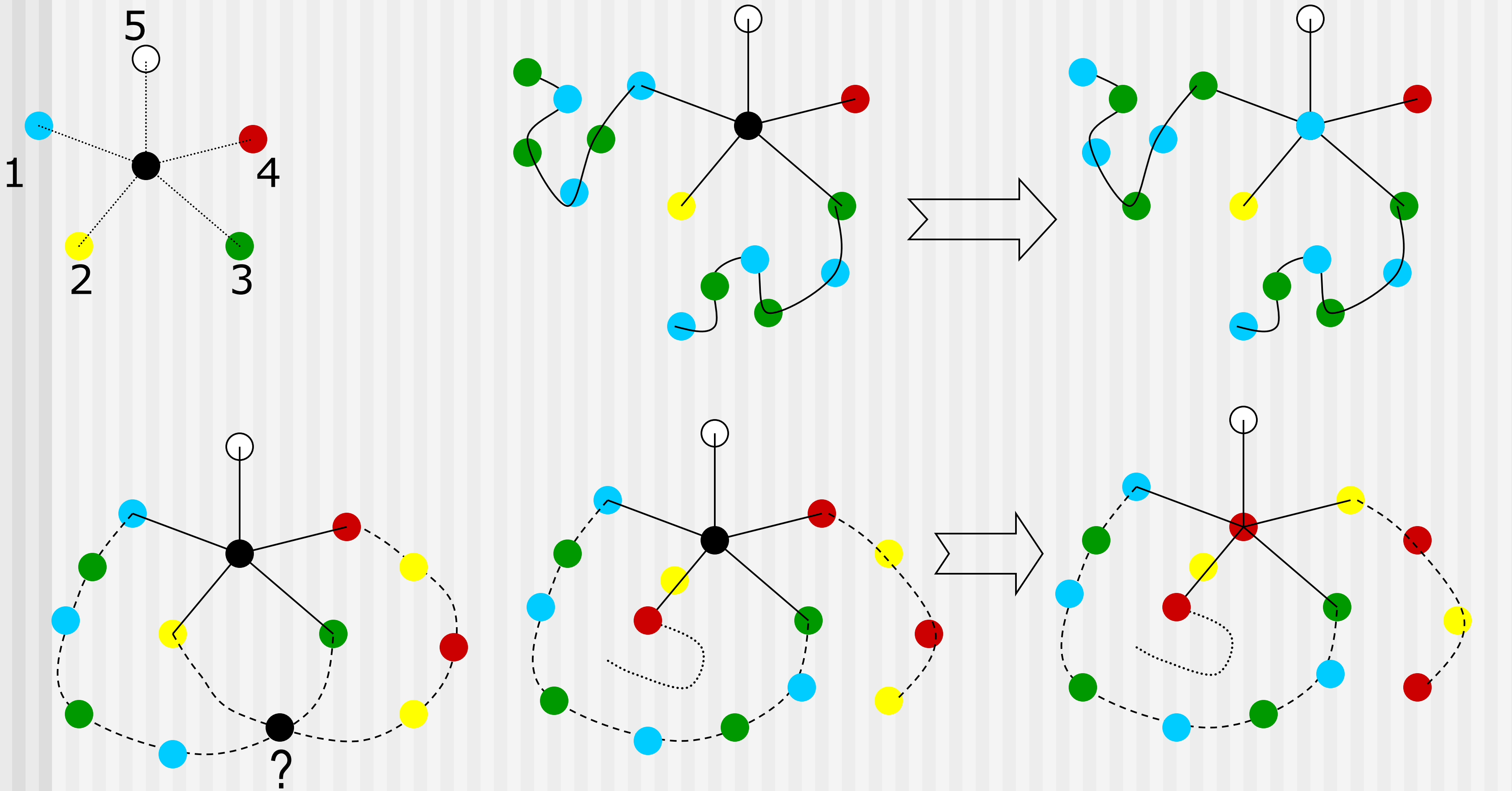


五色定理

- 定理12.16(Heawood,1890): 任何平面图都可5-着色
- 证明: (归纳法) (1) $n\leq 5$: 结论为真.

  (2) 设$n=k(\geq 5)$时结论为真. $n=k+1$时, $\exists v\in V(G)$, $d(v)\leq 5$. 令$G_1=G-v$, 对G_1用归纳假设, G_1可5-着色. 模仿G_1对G着色, 当$d(v)<5$, 或$d(v)=5$但与v相邻的点用了少于5种颜色时, 至少剩1种颜色给v着色.

五色定理(续)



五色定理(续)

- 证明: (续) **当$d(v)=5$且与v相邻的点用了5种颜色时**, 设v_i与v相邻且着颜色i, $i=1, 2,\ldots, 5$. 根据Jordan定理,下面2种路径不能同时存在: 从v_1到v_3只有$\{1,3\}$这2种颜色的路径, 从v_2到v_4只有$\{2,4\}$这2种颜色的路径. 不妨设在只有$\{2,4\}$这2种颜色的顶点的导出子图中, v_2与v_4是在不同的连通分支中, 于是把v_4所在分支里2与4颜色互换, 然后把颜色4给v. #

边着色

- 边着色:对图G每条边上涂一种颜色,使得相邻边涂不同颜色.
- 边色数:k-边可着色,不是(k-1)边可着色 $\chi'(G)$

边着色

- 定理12.17(Vizing): G是简单图,则

$$\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1. \quad \#$$

说明:

- $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$是二部图, 则$\chi'(G)=\Delta(G)$
- n>1时, $\chi'(K_n)=\begin{cases} n, & n\text{为奇数} \\ n-1, & n\text{为偶数} \end{cases}$

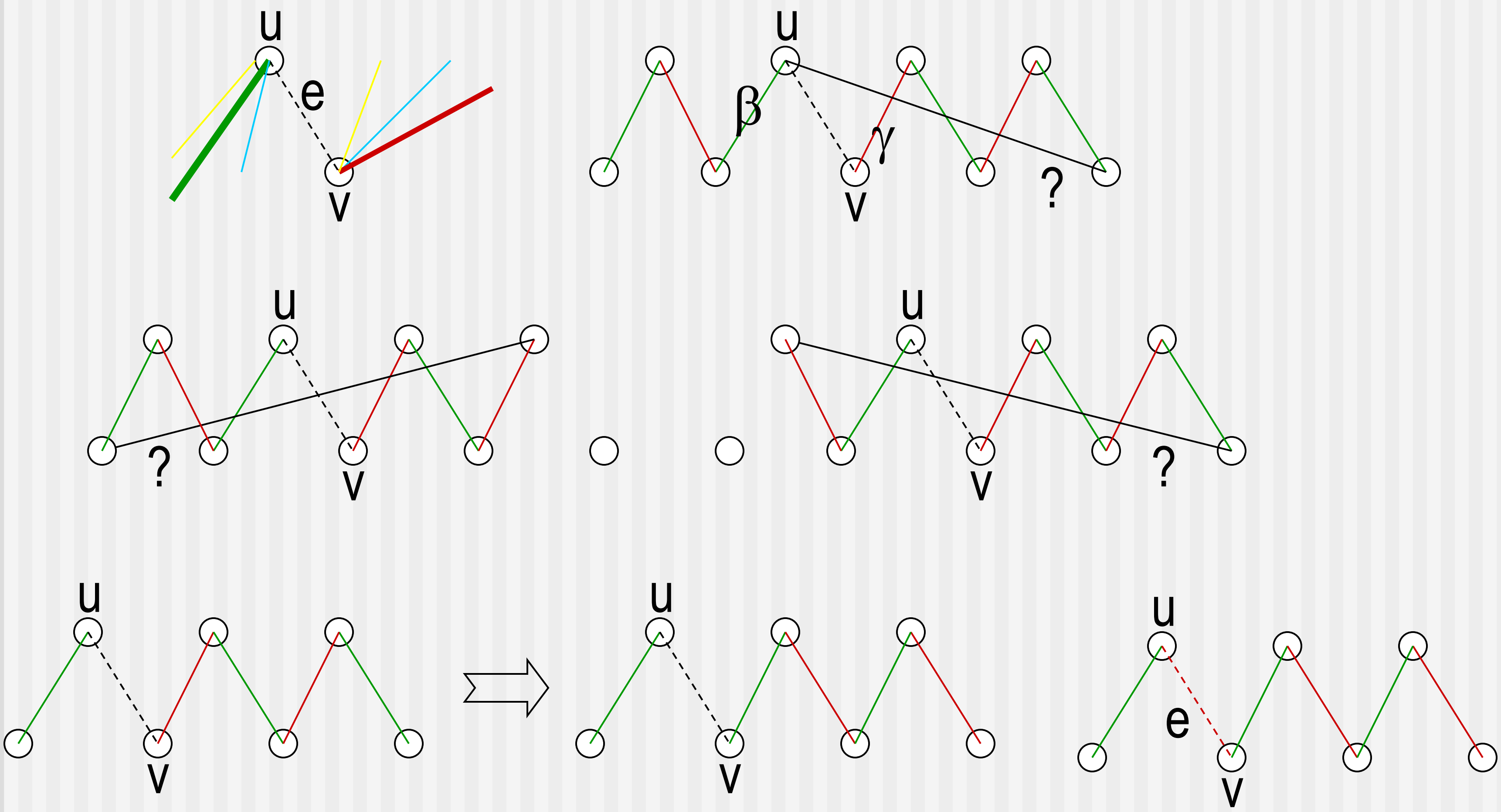
例12.5

- **$G=<V_1,V_2,E>$是二部图, 则$\chi'(G)=\Delta(G)$**
- 证明**: (归纳法) (1) $m=0,1$: 结论为真.**

(2) 设$m=k(\geq 1)$时结论为真. $m=k+1$时, $\exists e=(u,v)\in E(G)$. 令$G_1=G-e$, $\Delta(G_1)\leq\Delta(G)=\Delta$, 对$G_1$用归纳假设, G_1可Δ-边着色.因为$d_{G1}(u)$与$d_{G1}(v)\leq\Delta-1$,所以对G_1进行Δ着色时,至少有一种颜色不出现在u,同样至少一种颜色不现在v.

模仿G_1对G边着色, 当存在颜色α既不出现在u也不出现在v时, 用颜色α给e着色.

例12.5(续)

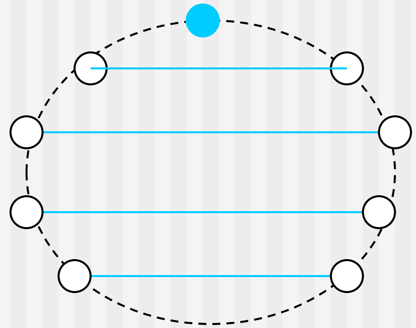


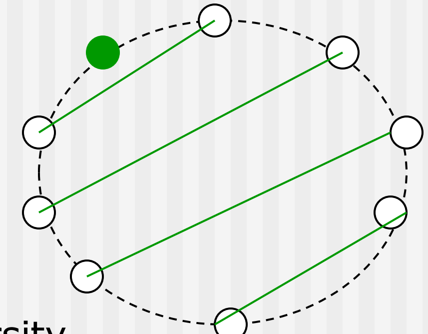
例12.5(续)

- 证明(续): 设颜色β出现在u而不出现在v, 颜色γ出现在v而不出现在u. 则不存在这样的路径: 从v到u只有$\{\beta,\gamma\}$这2种颜色的路径, 即在只有$\{\beta,\gamma\}$这2种颜色的边的导出子图中, v与u是在不同的连通分支中. 于是把v所在分支里β与γ颜色互换, 然后把颜色γ给e=(u,v). #

例12.6

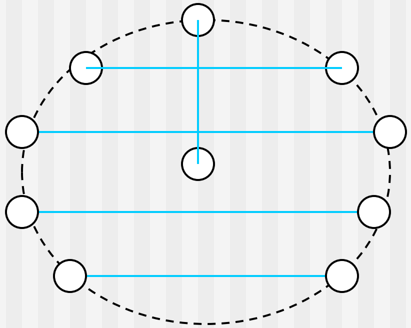
- n>1时, $\chi'(K_n)=\begin{cases} n, & n\text{为奇数} \\ n-1, & n\text{为偶数} \end{cases}$
- 证明: (1) n为奇数时, $\chi'(K_n)=n$.每边关联2个不同端点, 同色边没有公共端点, 同色边至多有(n-1)/2条, 至少需要n种颜色, $\chi'(K_n)\geq n$. 又存在n-边着色, $\chi'(K_n)\leq n$. 所以$\chi'(K_n)=n$.

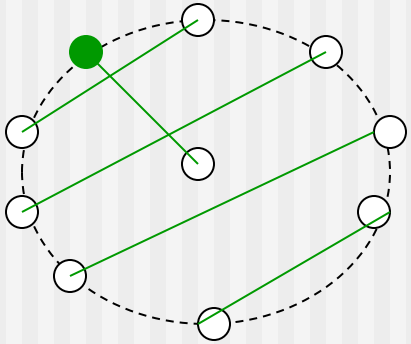




例12.6(续)

- **证明: (续) (2) n为偶数时, $\chi'(K_n)=n-1$.** 每边关联2个不同端点, 同色边没有公共端点, 同色边至多有n/2条, 至少需要n-1种颜色, $\chi'(K_n)\geq n-1$. 又存在(n-1)-边着色, $\chi'(K_n)\leq n-1$. 所以$\chi'(K_n)=n-1$. #





例12.7

- 某一天内有**n**个教师给**m**个班上课.每个教师在同课时只能给一个班上课.

  (1) 这一天内至少排多少节课?

  (2) 不增加节数情况下至少需要几个教室?

  (3) 若$n=4, m=5$. 教师是t_1, t_2, t_3, t_4, 班是c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. 已知t_1给c_1, c_2, c_3上2节,1节,1节课, t_2给c_2, c_3各上1节课, t_3给c_2, c_3, c_4各上1节课, t_4给c_4, c_5上1节,2节课.

求最省教室的课表.

例12.7(解)

- **解: 令$G=\langle T,C,E\rangle$, $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_m\}$, $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$, $E=\{(t_i,c_j)\mid t_i$给c_j上一节课$\}$. 给G进行边着色, 同色边代表的教学可以同时进行, 所以颜色数就是节数, 同色边数就是教室数.**

  (1) $k=\chi'(G)=\Delta(G)$时, 节数最少.

  (2) $\min\max\{k_1,k_2,\ldots,k_\Delta\}$, 教室数最少. 其中$k_i$是着颜色i的边数. ("平衡" 着色)

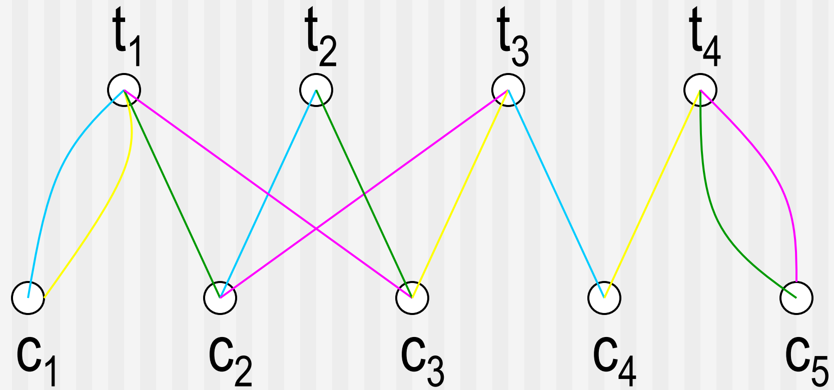
例12.7(解,续)

- **解: (续) (3) 已知条件得出下图G, $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_4\}$, $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_5\}$.**

  $\Delta(G)=4$, 节数最少是4.

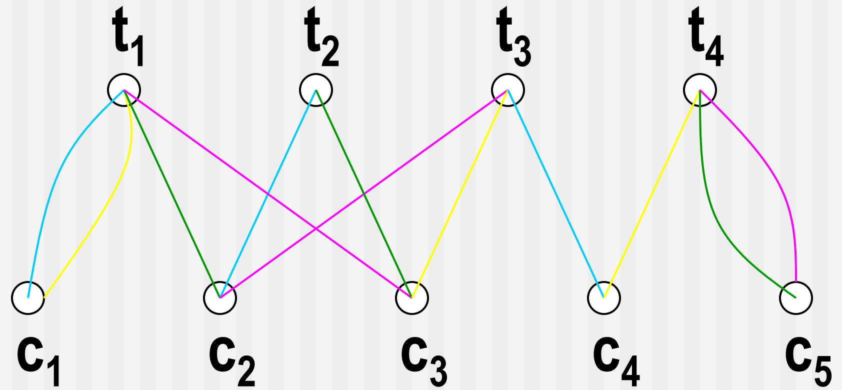
  min max $\{k_1,k_2,\ldots,k_4\}=3$, 教室数最少是3.

课表如下. **#**



例12.7(解,续)

节	t_1	t_2	t_3	t_4
1	c_1	c_2	c_4	--
2	c_1	--	c_3	c_4
3	c_2	c_3	--	c_5
4	c_3	--	c_2	c_5



边着色

- 设无环图G=<V,E>,给G进行k-边着色,$k \geq \chi'(G)$. 令

$$R=\{ (e_i,e_j) \mid e_i\text{与}e_j\text{着同色} \}$$

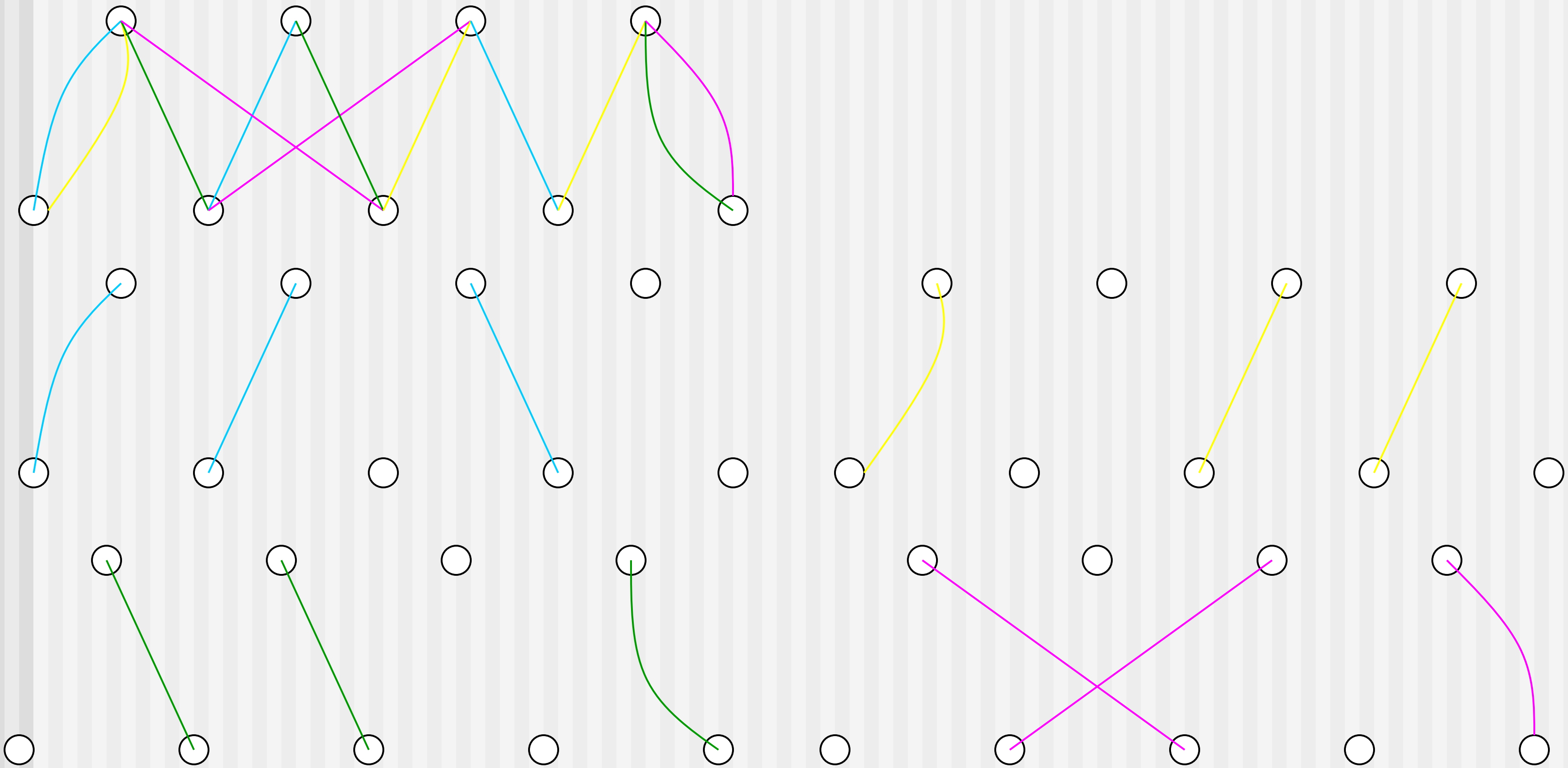
则R是E上等价关系, 商集合

$$E/R=\{E_1,E_2,\ldots,E_k\}$$

是E的划分, 划分块中元素着同色

- 说明: 同色边构成"边独立集", 或"匹配"

例



总结

- 点色数$\chi(G)$, 面色数$\chi^*(G)$, 边色数$\chi'(G)$
- $\chi(G)$上界: $\chi \le \Delta+1$
- 色多项式
- **Brooks定理:连通非完全(n≥3)非奇圈:**$\chi\le\Delta$.
- 五色定理: $\chi^* \le 5$
- **Vizing定理: 简单图:** $\Delta \le \chi' \le \Delta+1$.

作业

- P189: 1,2,3,11,12,13