第11章　平面图

- 平面图
  - 基本概念
  - 欧拉公式
  - 平面图的判断
  - 对偶图

在实际应用中,如高速公路设计、印刷电路设计,都要求线路不交叉,这就是平面图, 一个图能否画在一个平面上,且任何边都不交叉, 这就是图的平面化问题. 这个问题在近些年来, 特别是大规模集成电路的发展进一步促进了对平面图的研究.

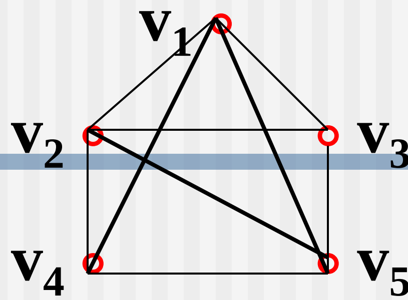
设**G**是无向图, 如果能将**G**的所有结点和边都画在一个平面上,且使得任何两条边除了端点外没有其它交点, 则称**G**是个平面图。 一个图表面上是个非平面图, 如果通过改变边的位置就变成平面图, 称此图是可平面化的。

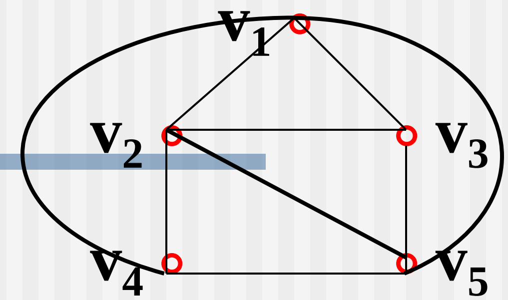
定义11.1

- 平面图**(plane graph):** 在平面上边与边不在非顶点处相交的图
- 可平面图**(planar graph):** 可以画在平面上,使得边与边不在非顶点处相交的图
- 平面嵌入**(imbedding):** 画在平面上使得边与边不在非顶点处相交
- 非平面图**:** 无平面嵌入的图

例如.

可平面化的图.

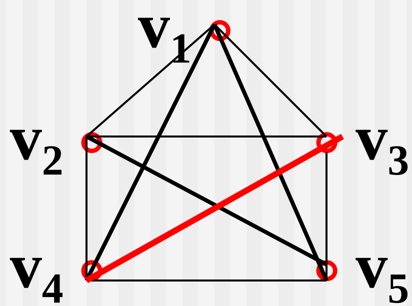


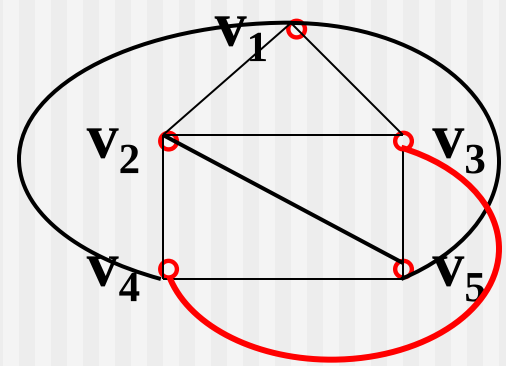


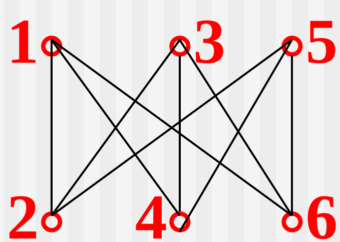
下面是两个

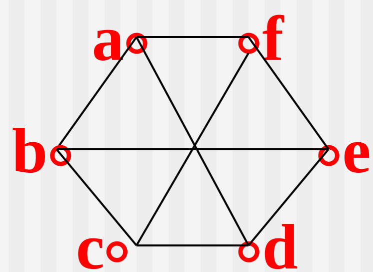
重要的非平面图:

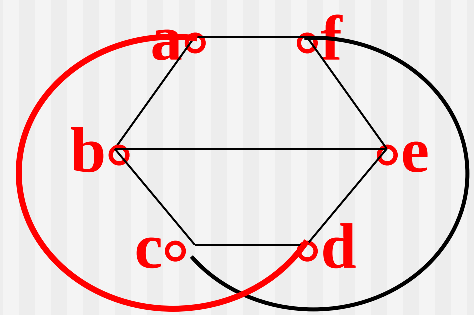
K_5和$K_{3,3}$





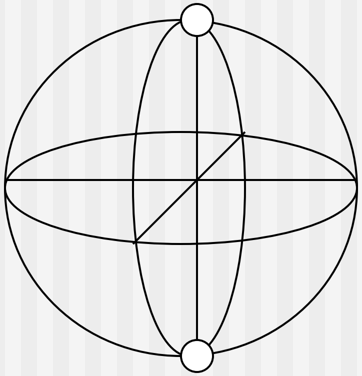






* 球面嵌入，曲面嵌入

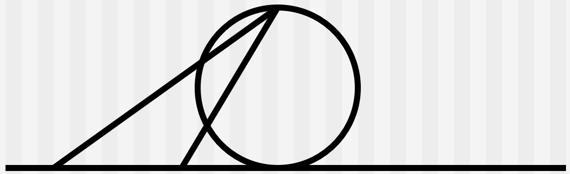
- 球面嵌入：画在球面上使得边与边不在非顶点处相交
- 曲面嵌入：画在曲面上使得边与边不在非顶点处相交

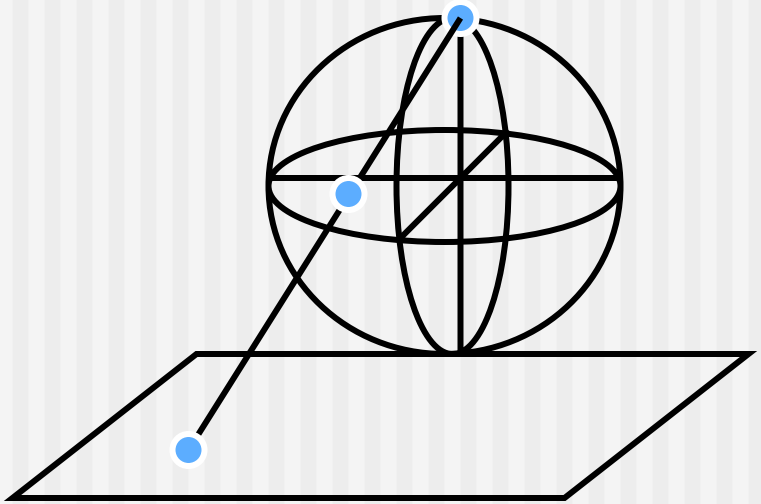


定理11.1

定理11.1　可平面嵌入 ⇔ 可球面嵌入

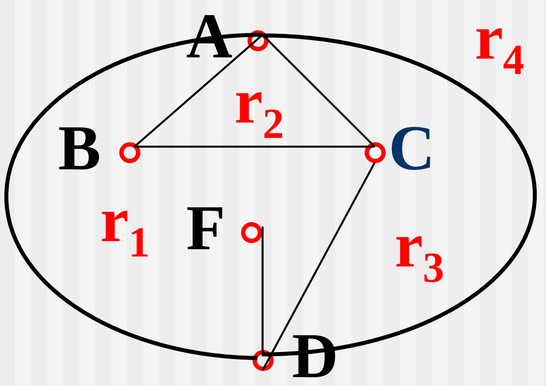
证明　连续球极投影.　　#





面

- 区域:不含顶点与边的极大连通曲面, **R**
- 外部区域: 面积无限的区域, **R_0**
- 区域边界: 与**R**关联的边和顶点构成的子图∂R
- 面: 区域及其边界
- 面的次数: **deg(R)=**边界长度



r_1 : 边界:ABCDFDA $deg(r_1)=6$

r_2 : 边界:ABCA $deg(r_2)=3$

r_3 : 边界:ACDA $deg(r_3)=3$

r_4 : 边界:ADA $deg(r_4)=2$

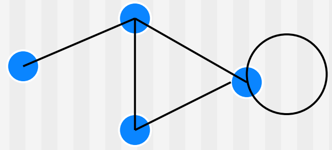
定理11.2

- 定理11.2:平面图G中所有面的次数之和等于边数m的2倍,即$\Sigma^{r}_{i=1}deg(R_i)=2m$.

证明: 任何一条边,或者是两个面的公共边,或者在一个面中作为边界被重复计算两次,故面的次数之和等于边数的两倍#

定理11.3

定理11.3 任何平面嵌入的内部面都可以在另一种平面嵌入下成为外部面



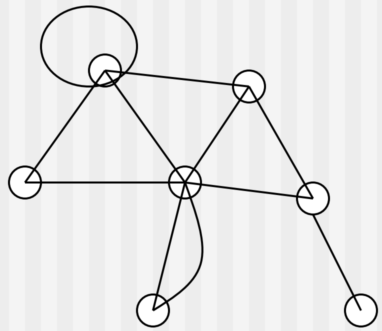
欧拉公式

- 欧拉公式: 设G是连通平面图, 则

$$n-m+r=2$$

其中r是G的面数.

- 例: $n=7,m=11,r=6$: $7-11+6=2$. #



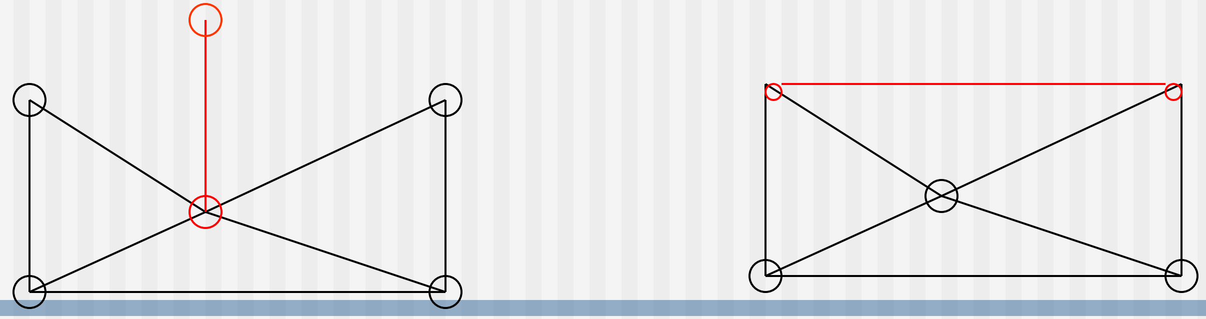
n、m、r分别表示**G**中结点数、边数、面数, 证明**n-m+r=2.**

证明: (对边进行归纳)

(1)若**G**为一个孤立结点,则**n=1,m=0,r=1**,结论成立。

(2)若**G**为一条边,**n=2,m=1,r=1**,结论成立。

(3)设**G**为**k**条边时,欧拉公式成立.即$n_k-m_k+r_k=2$.当**k+1**条边时,在**k**条边的连通图上增加一条边,仍为连通图,只有两种情况



- (a) 加上一个新结点,该结点与图上的一点相连,此时n_k与m_k两者都增加1,而面数r_k未变,故

$$(n_k+1)-(m_k+1)+r_k=2$$

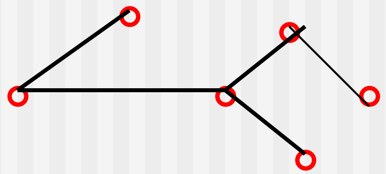
- (b) 用一条边连接图上的两已知点,此时m_k和r_k都增加1,而结点数v_k不变,故

$$n_k-(m_k+1)+(r_k+1)=2$$

设n、m、r分别表示G中
结点数、边数、面数, 则有 n-m+r=2.

证明: (对面数r归纳证明)

⑴当r=1 时, 此时图是连通无回路的树, 则总是有
m=n-1, 于是
n-m+r=n-(n-1)+1=2　结论成立.



⑵假设当G有r≤k-1个面时, 结论成立.
当G有r=k个面且是连通图时, 当k≥2 时, 至少有一个
回路, 所以去掉此回路中的一条边后得到子图G’, G’中有
k-1个面, 结点数同G中结点数, 由⑵得n-(m-1)+(k-1)=2
整理得 n-m+k=2　即 n-m+r=2　定理得证.

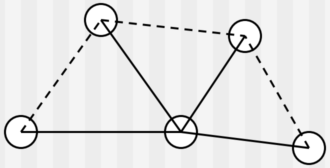
欧拉公式(推广形式)

- 欧拉公式: 设G是平面图, 则

  $$n-m+r=1+p$$

  其中r是G的面数, p是G的连通分支数

- 证明:(破圈法)任选一个回路,删除回路上1边,m’=m-1,这边分隔的2个面合并,r’=r-1,所以n-m+r=n-m’+r’. 到最后无回路时是森林, m”=n-p, r”=1, 即n-m+r=n-m”+r”=1+p. #



定理11.8

- **定理11.8**: 设G是连通平面图, G的各面的次数至少是$l(\geq 3)$, 则

$$m \leq (n-2)l/(l-2)$$

- **证明**: $r=2+m-n$,

$$2m=\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i) \geq l \cdot r = l \cdot (2+m-n),$$

所以 $m \leq (n-2)l/(l-2)$. #

- 给出平面图边数的上界
- 判定不是平面图

定理11.9

- **定理11.9**: 设平面图G有p个连通分支, G的各面的次数至少是$l(\geq 3)$, 则

$$m \leq (n-p-1)l/(l-2).$$

- **证明**: $r=1+p+m-n$,

$$2m=\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)\geq l\cdot r=l\cdot(1+p+m-n),$$

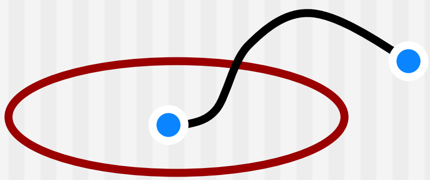
所以 $m\leq(n-p-1)l/(l-2)$. #

例11.2(必要条件)

- **推论: K_5和$K_{3,3}$都不是平面图.**
- **证明: (反证)假设K_5和$K_{3,3}$都是平面图.**
  (1) K_5是简单图, 所以$l=3$,
  $10=m\le(n-2)l/(l-2)=(5-2)3/(3-2)=9$, 矛盾!
  (2) $K_{3,3}$是偶图,无奇圈,所以$l=4$,
  $9=m\le(n-2)l/(l-2)=(6-2)4/(4-2)=8$, 矛盾!
  #

Jordan定理

- **Jordan**曲线把平面分为**2**部分，连接内部与外部点的任意曲线必然与**Jordan**曲线相交.



- **Jordan曲线**: 自身不相交的封闭曲线

定理11.10

- **定理11.10: 设n(≥3)阶简单平面图G有m条边,则 m≤3n-6.**
- **证明: G是简单图, 所以ℓ≥3,**

  $$m \le (n-p-1)\ell/(\ell-2) \le (n-2)3 = 3n-6,$$

其中,

$\ell/(\ell-2) = 1+2/(\ell-2)$ **在ℓ=3时达到最大值3 #**

定理11.12

- **定理11.12: 设G是简单平面图,则G中至少存在一个顶点,其度数小于等于5. (即证 $\delta(G)\le 5$.)**
- **证明: 若G的顶点数$n\le 6$,结论显然成立.**

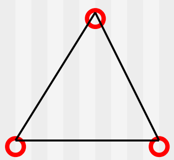
(反证) 设$n\ge 7$并且$\delta\ge 6$, 则

$$2m=\Sigma d(v)\ge n\delta\ge 6n \Rightarrow m\ge 3n,$$

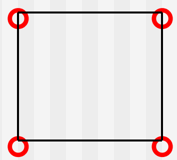
与 $m\le 3n-6$ 矛盾. #

极大平面图

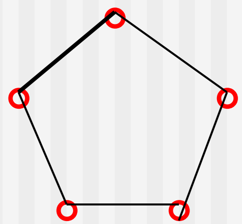
定义：设G是个简单图，令u、v是不邻接的结点，如果不能在u、v之间增加一条边而不破坏图的平面性时，则称G是极大平面图。



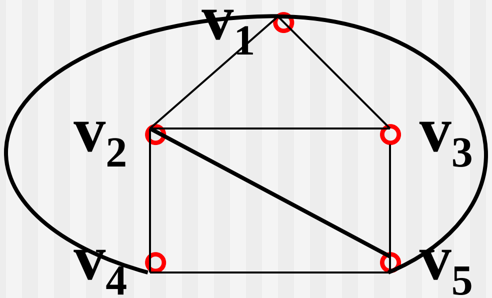
1



2

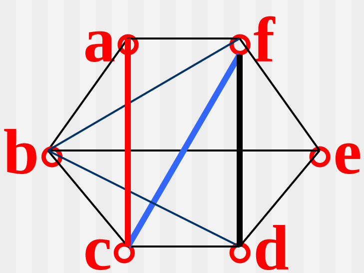


3

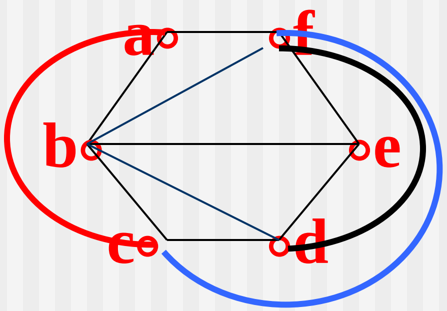


4

可见1、4、5、6是极大平面图。而2、3不是极大平面图。



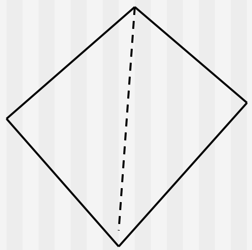
5



6

极大(maximal)平面图

- **定理11.4: n(≥3)阶简单连通平面图是极大平面图⇔∀R,deg(R)=3**
- **证明: (⇒)简单图⇒deg(R)≥3,**
  极大平面图⇒deg(R)≤3(反证≥4)
  (⇐)∀R,deg(R)=3⇒不能加边而不交叉. #



- **极小非平面图:是非平面图, 但是删除任意1边就是平面图**

定理11.11：设G是个极大平面图，且有n个结点，m条边，r个面，则: $m=3n-6$, $r=2n-4$。

证明：因为G是极大平面图，每个面由3条边围成。所以有 $3r=2m$, $r=(2/3)m$, 由欧拉公式$n-m+r=2$，得 $r=m-n+2$，于是

$(2/3)m=m-n+2$，$2m=3m-3n+6$，所以 $m=3n-6$。

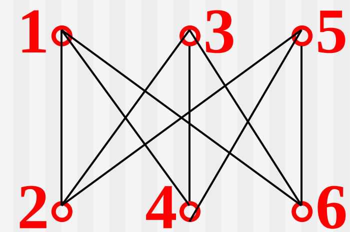
进而得 $r=m-n+2=3n-6-n+2=2n-4$。

定理得证。

前面定理是判定平面图的必要条件,而不是充分条件.

如果一个图 满足$m \le 3n-6$, 它不一定是平面图. 例如, $K_{3,3}$中

$n=6 \quad m=9 \quad 9 \le 3 \times 6-6$ 满足$m \le 3n-6$,

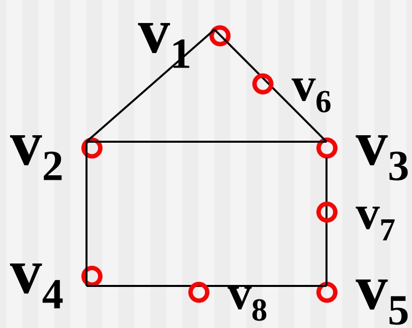


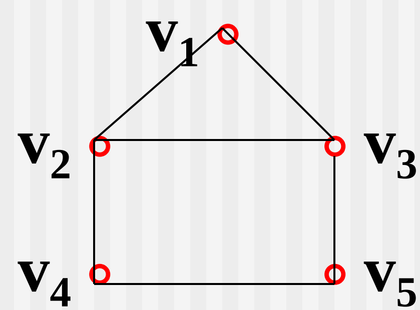
但它不一定是平面图.

下面要介绍一个判定一个平面图的充分必要条件, 即Kuratowski(库拉图斯基)定理. 在此之前先介绍一个新概念----在2度结点内同构(同胚).

在一个图中有2度结点, 则这些结点不影响平面的面数, 例如下面两个图:

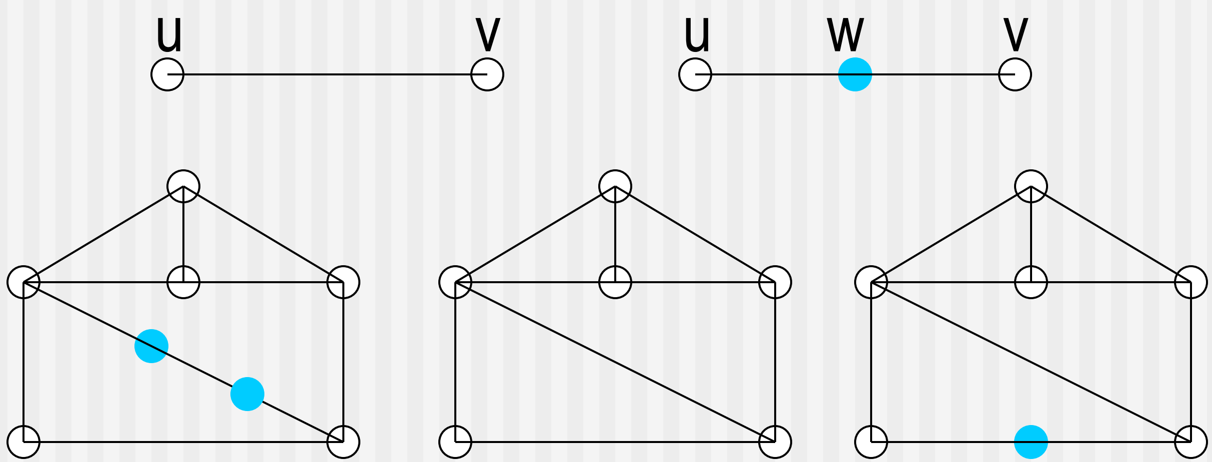
我们称这两个图是同胚的图.





同胚(homomorphism)

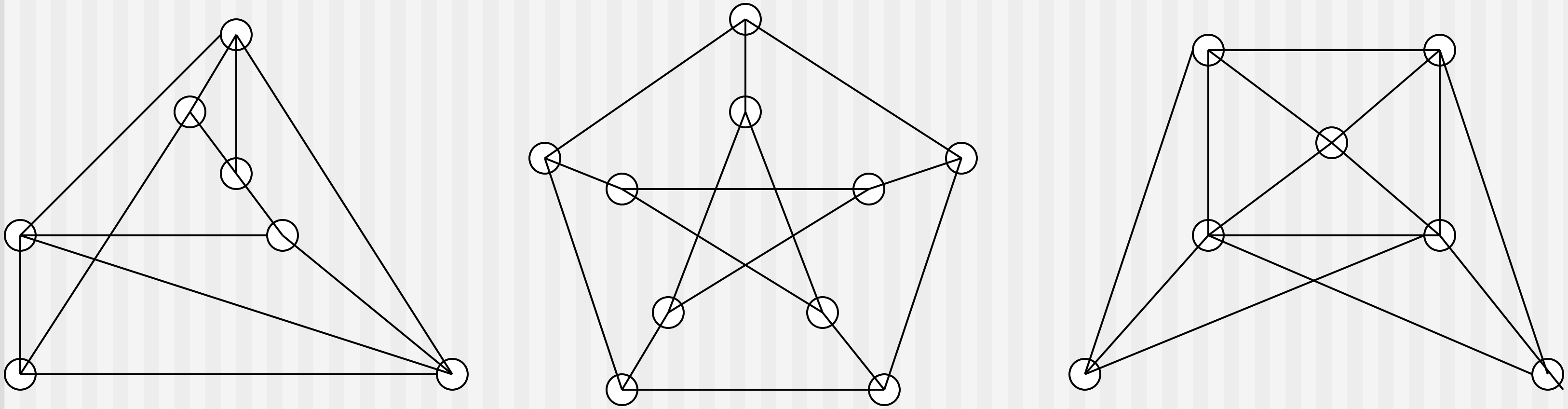
- **插入2度顶点: 把(u,v)变成(u,w),(w,v)**
- **删除2度顶点: deg(w)=2, 把(u,w),(w,v)变成(u,v)**
- **同胚: 反复插入或删除2度顶点后同构**



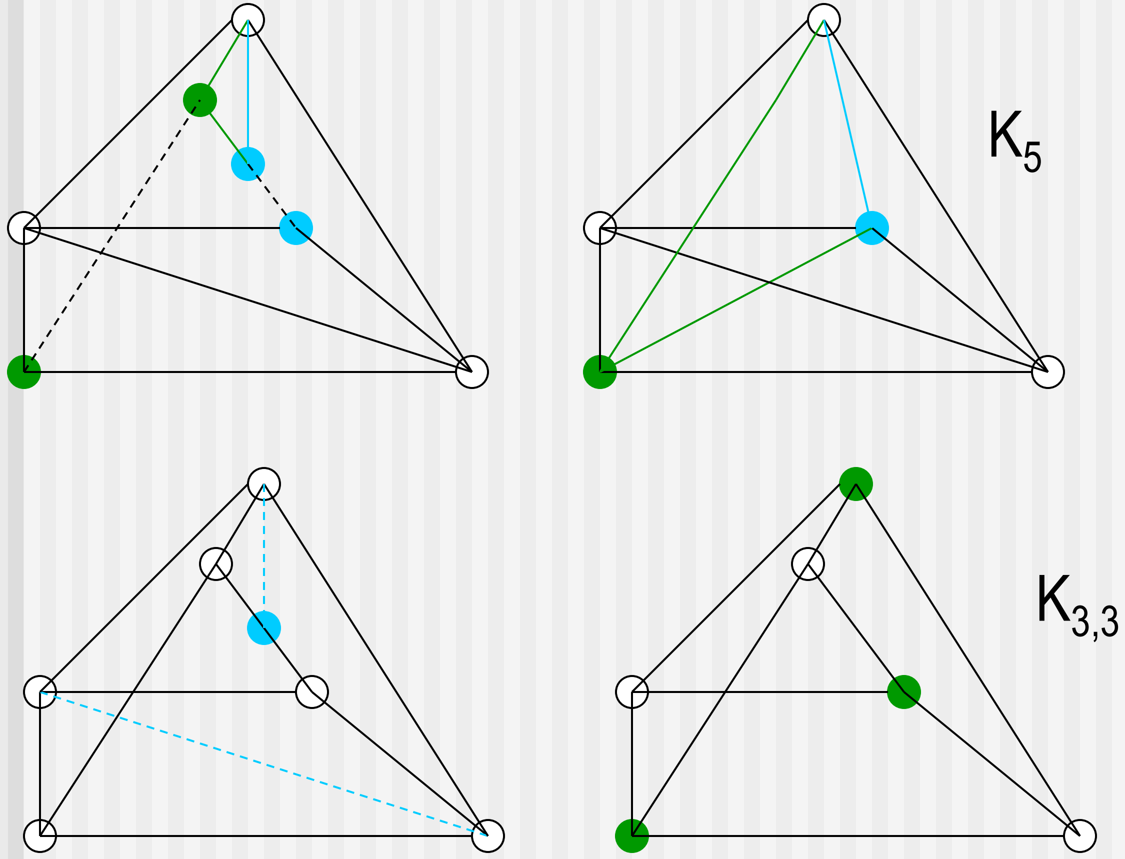
Kuratowski定理

- 定理11.13: 图G是平面图 $\Leftrightarrow$ G没有与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图
- 定理11.14: 图G是平面图 $\Leftrightarrow$ G没有可以边收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图

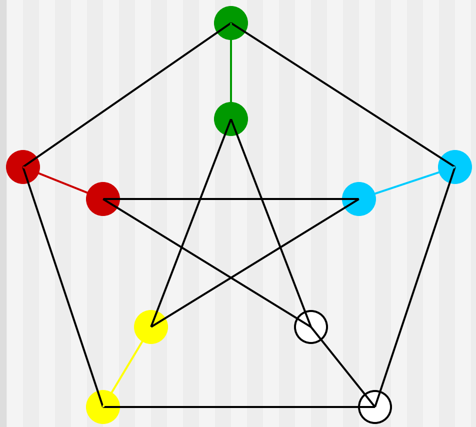
例11.3

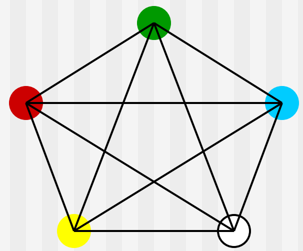


例11.3(1)

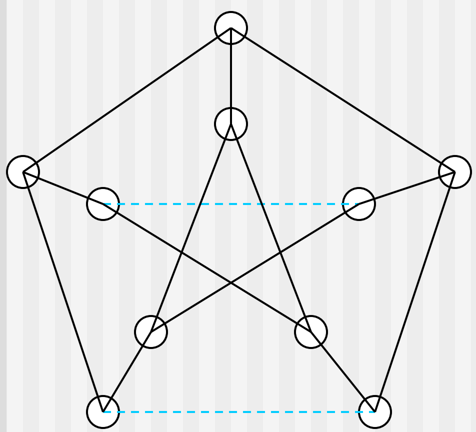


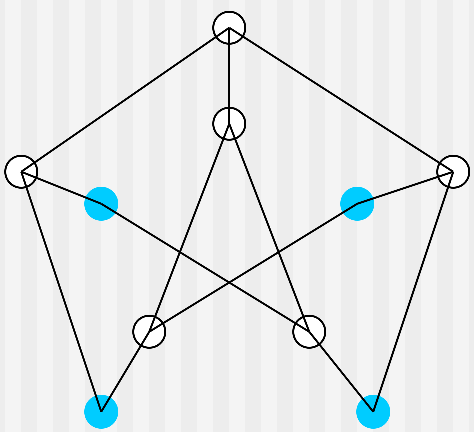
例11.3(2)

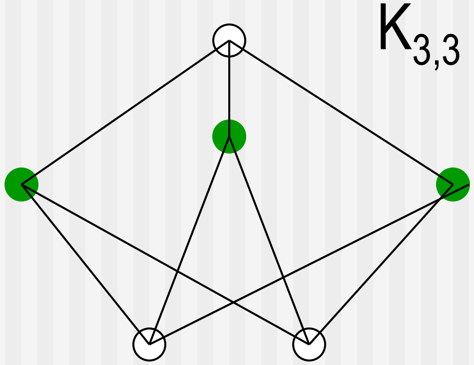




K_5

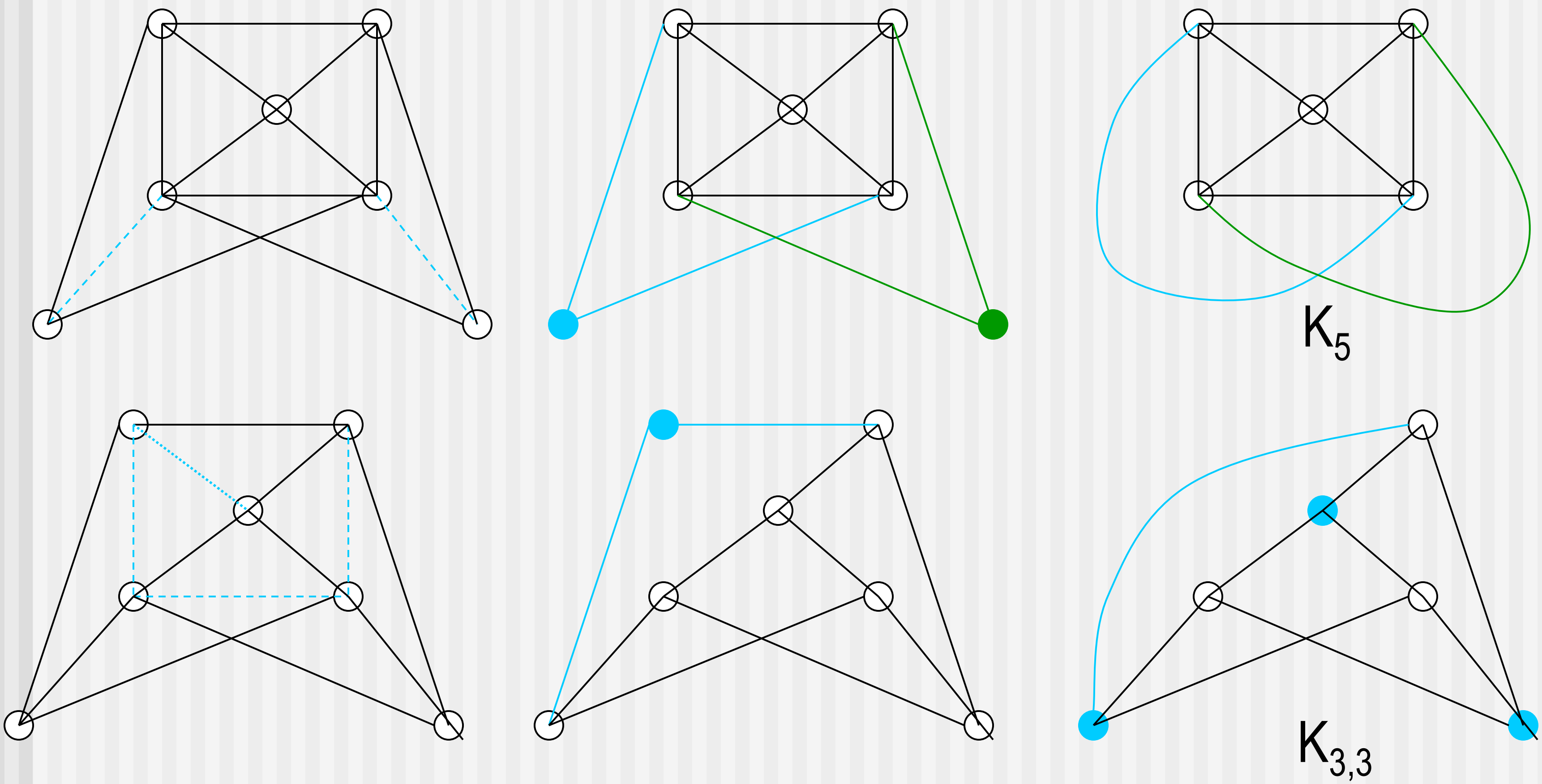






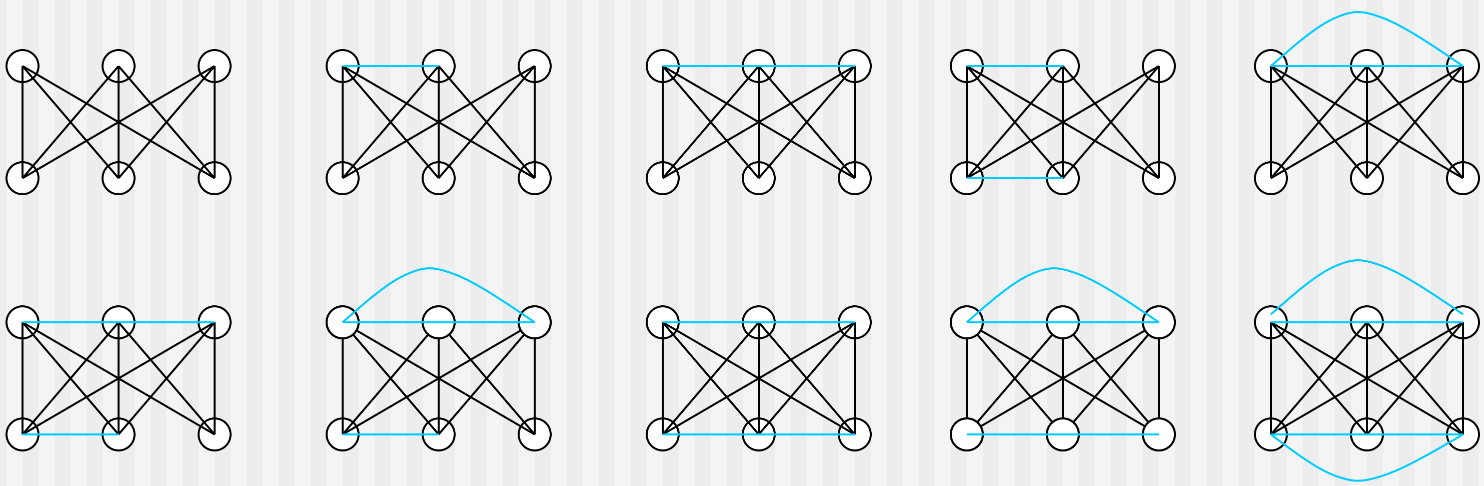
$K_{3,3}$

例11.3(3)



例11.6

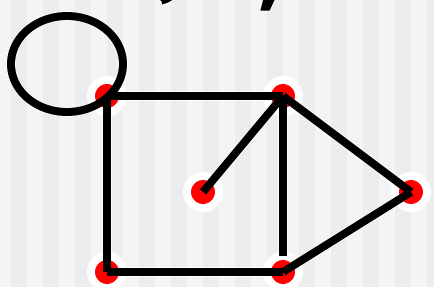
- 例11.6: K_6的含$K_{3,3}$的非同构子图有哪些?
- 解: K_6有15条边, $K_{3,3}$有9条边, 分别给$K_{3,3}$加0,1,2,3,4,5,6条边: 共10种. #

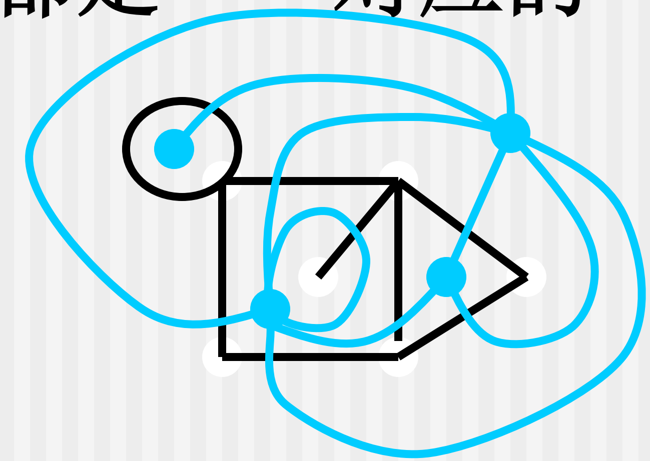


对偶图

- 平面图G=<V,E>，G的面集合是R
- 对偶图G*=<V*,E*>，G*的面集合是R*，

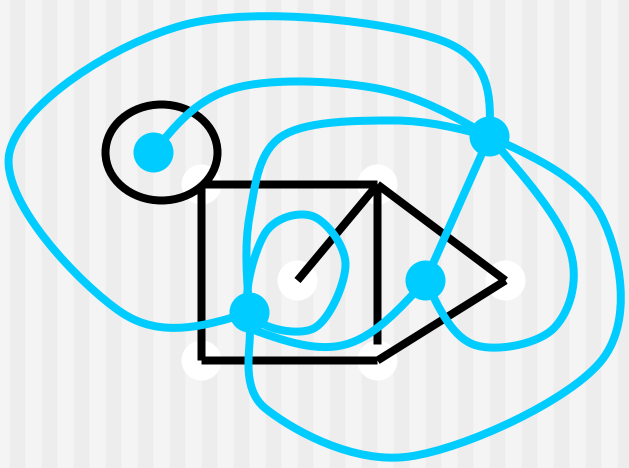
则V*与R，E*与E，都是一一对应的





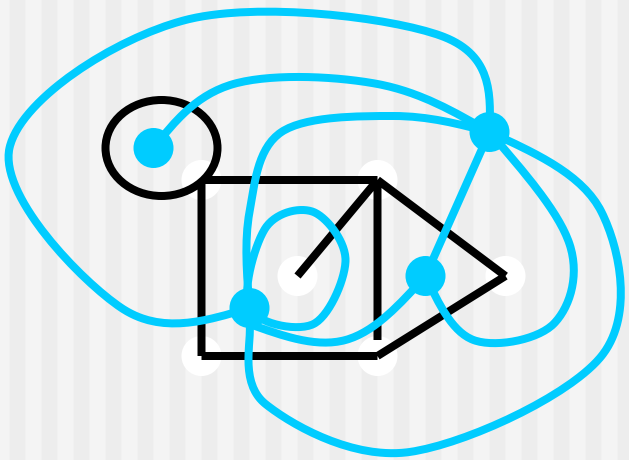
对偶图的性质

- 对偶图是连通平面图
- 环与桥互相对偶
- 平行边对偶于**2**个面之间的多条边界



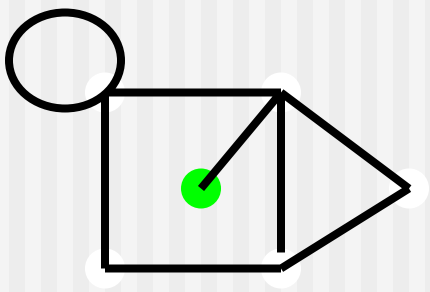
对偶图的性质

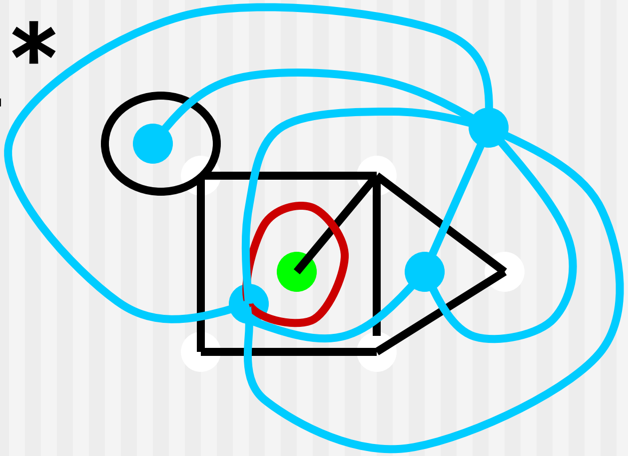
- $n^*=r,\ m^*=m$
- $r^*=n-p+1$　　　$(n-m+r=1+p,\ n^*-m^*+r^*=2)$
- $d_{G^*}(v_i^*)=\deg_G(R_i)$

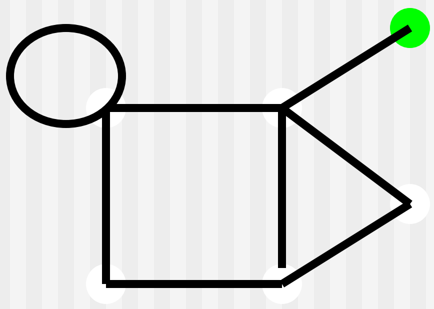


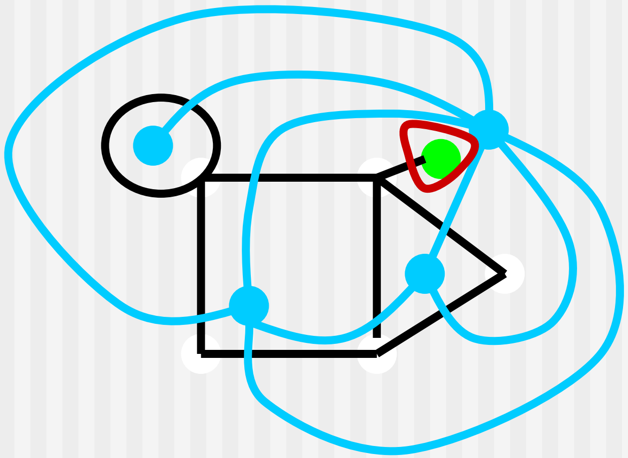
对偶图的性质

- $G_1 \cong G_2$, 不一定$G_1^* \cong G_2^*$



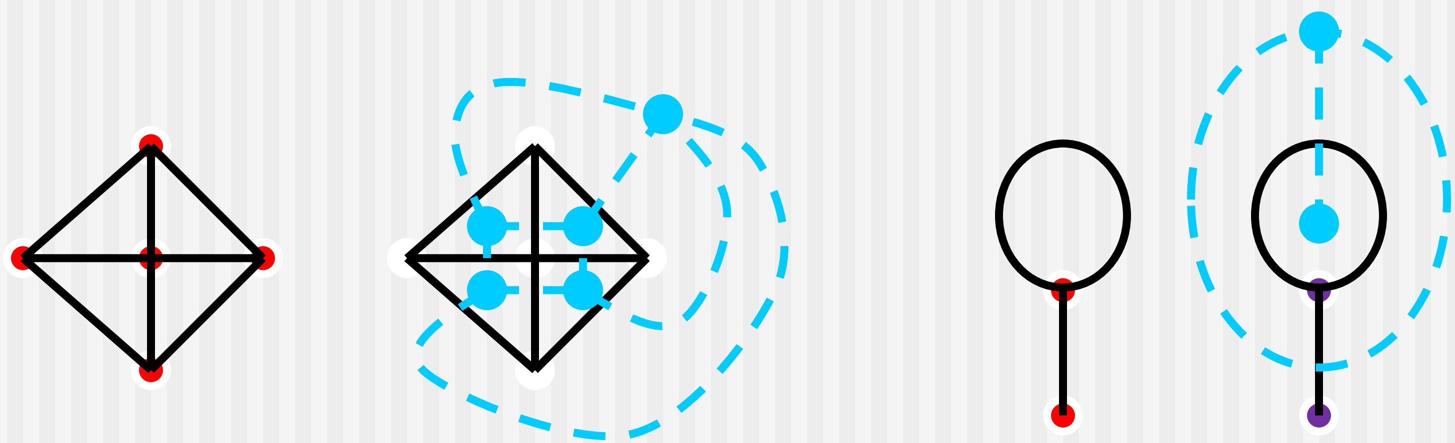






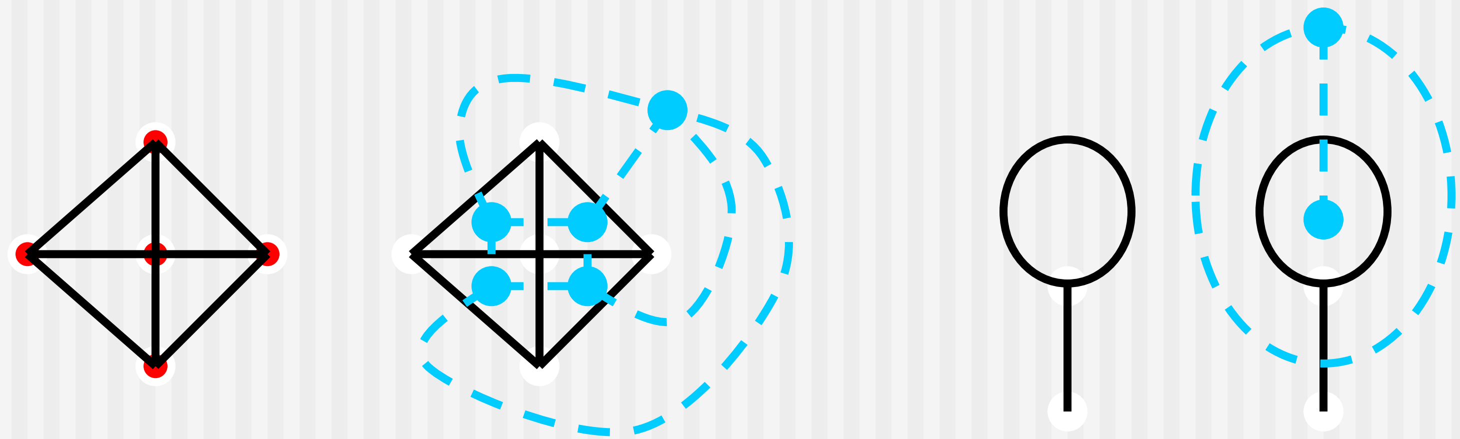
对偶图的性质

- **G连通 ⇔ G≅G**(要求G*不改变形状)**



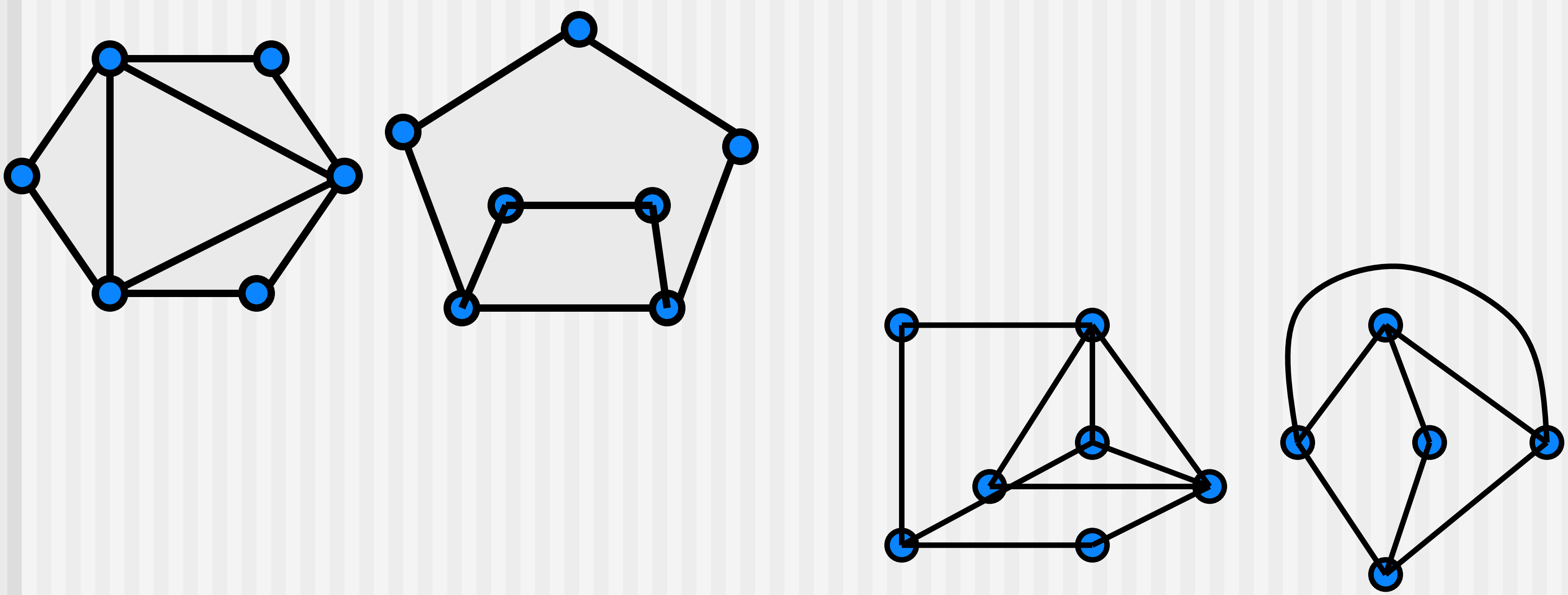
自对偶图

- 自对偶图: **G≅G*.**
- **n≥4**时, 轮图**W$_n$**是自对偶图



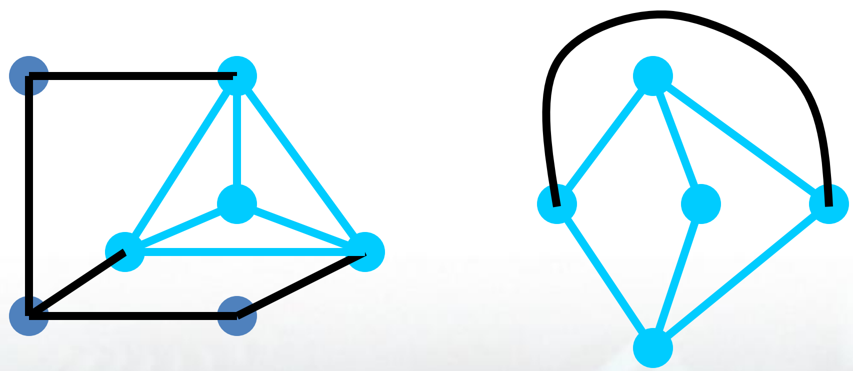
外(可)平面图

- 平面图的所有顶点可都在一个面的边界上



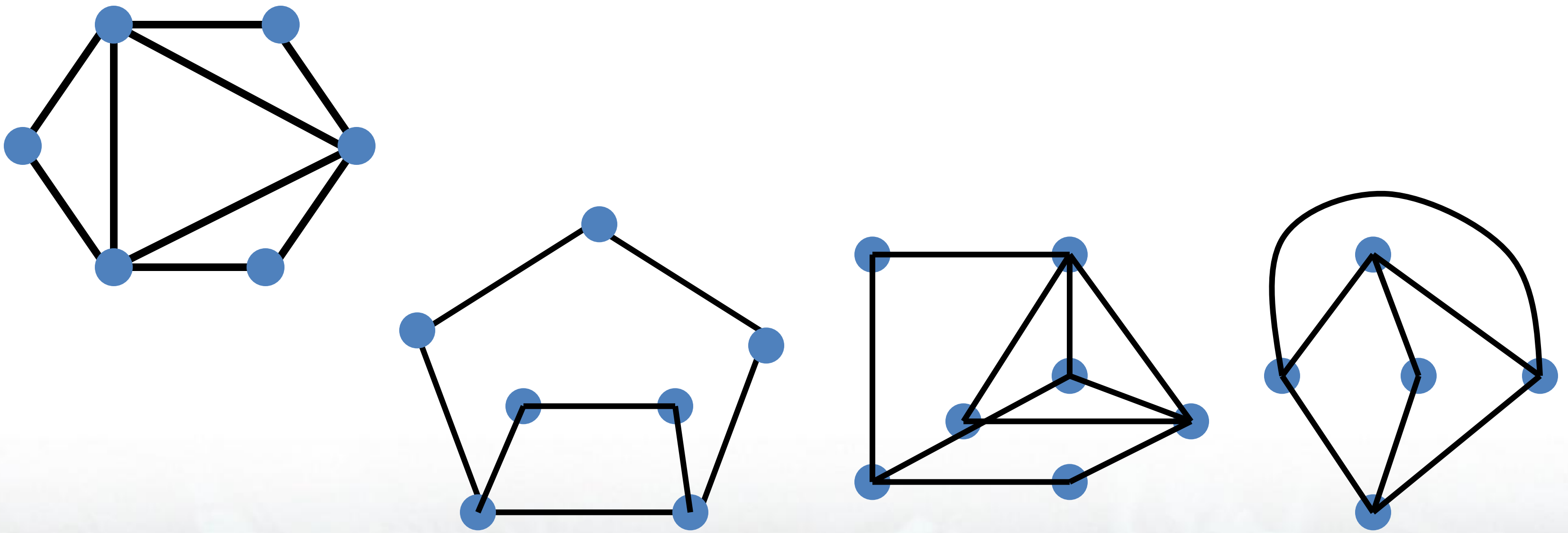
外平面图充要条件

- G是外平面图 ⇔ G不含与K_4或$K_{2,3}$同胚子图 #
- (G是平面图 ⇔ G不含与K_5或$K_{3,3}$同胚子图)



极大外平面图

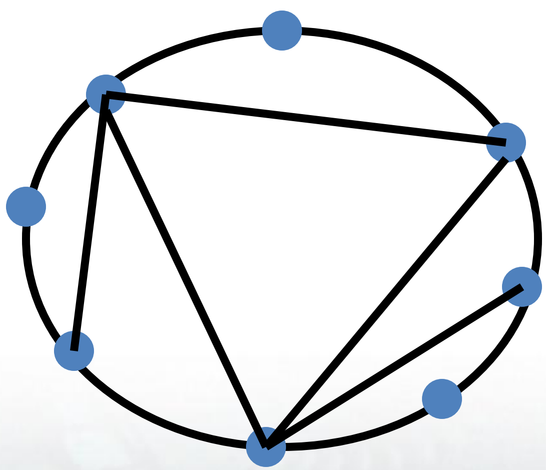
- 本身是简单外平面图,但是在任意不相邻顶点之间加边就不是外平面图了

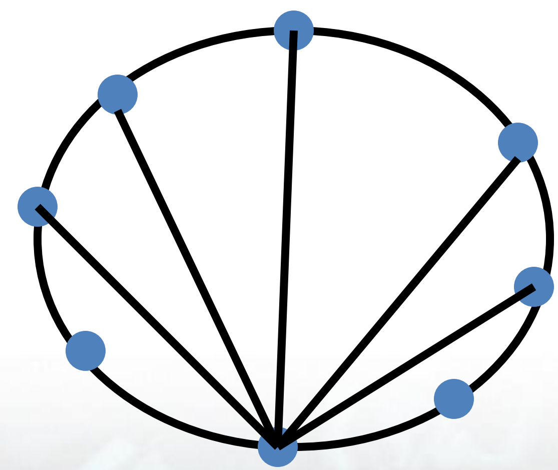


极大外平面图充要条件

- 设G是n(≥3)阶外平面图，所有顶点在外部面边界上, 则 G 是极大外平面图 ⇔

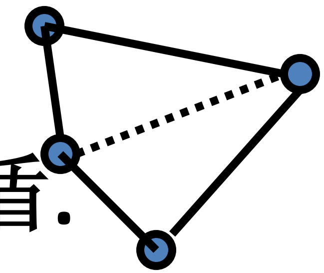
G外部面边界是n-圈, 所有内部面边界是3-圈.





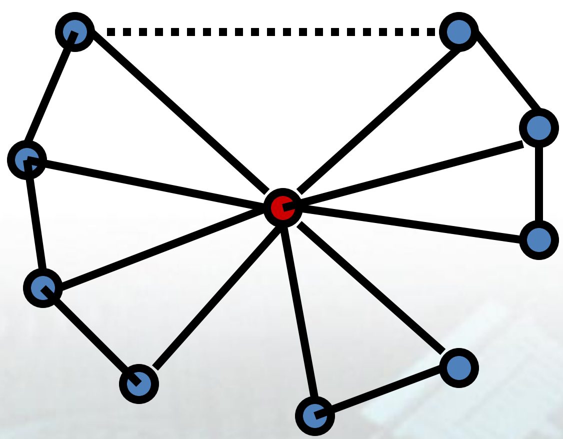
定理11.19证明(⇒)

- (⇒) 反证, 分情形讨论.



(1)有4次以上内部面 ⇒ 可加边, 矛盾.

(2)外部面边界不是圈 ⇒ 简单回路，连接两个以上的圈，有割点 ⇒ 不同圈的不相邻顶点可加边,不破坏外可平面性， 矛盾.

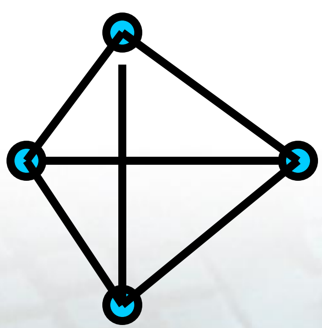


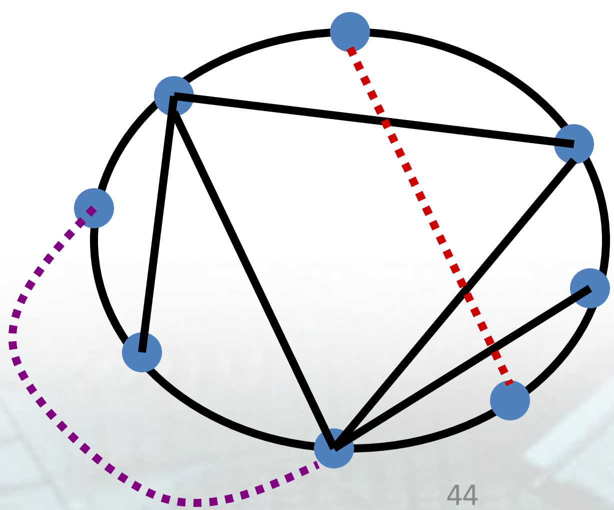
定理11.19证明(⇐)

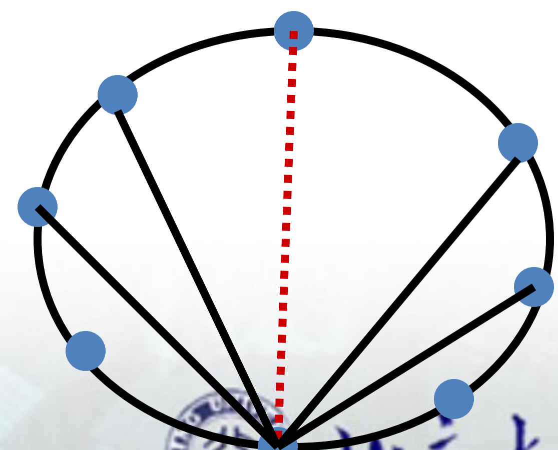
- (⇐) 分情形讨论

(1) 只有一个内部面 ⇒ K_3 ⇒ 是极大外平面图

(2) 至少有两个内部面. 加边e=(u,v) ⇒ 其余顶点分两侧 ⇒ 有边连接两侧顶点 ⇒ 子图同胚K_4.　　#







极大外平面图必要条件

- **n(≥3)**阶极大外平面图**G**所有顶点在外部面边界上

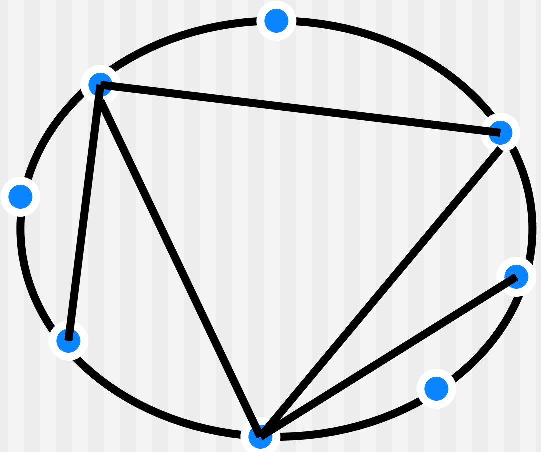
⇒ **G**有**n-2**个内部面

⇒ **m=2n-3**

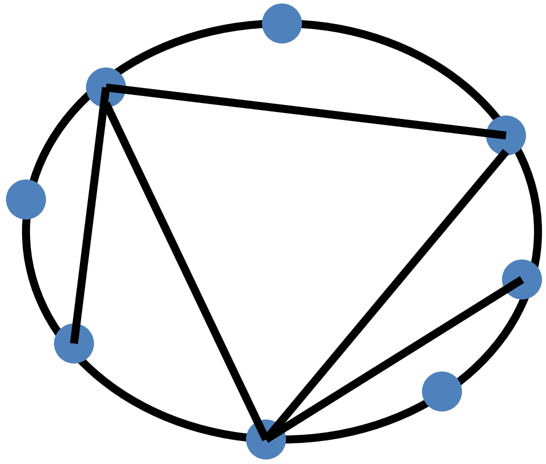
⇒ 至少有**3**个顶点度数≤**3**

⇒ 至少有**2**个顶点度数**=2**

⇒ **κ=2.**



定理11.20-21证明(要点)



- n(≥3)阶极大外平面图G
  所有顶点在外部面边界上

⇒ G有**n-2**个内部面 (归纳法)

⇒ **m=2n-3** (面的握手定理)

⇒ 至少3个顶点度≤3 (m=2n-3,握手定理)

⇒ 至少2个顶点度=2 (内部面提供0,1,2边界)

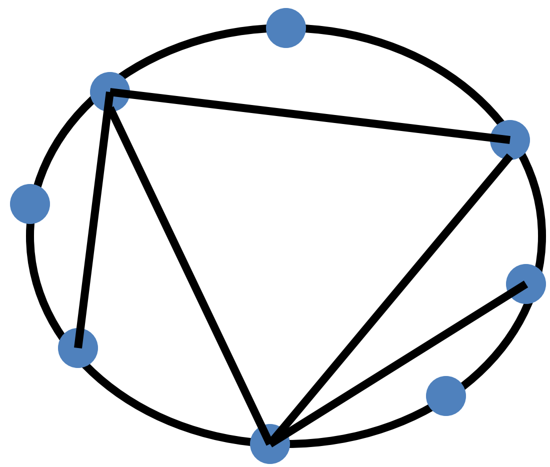
⇒ **κ=2** (K_3; 圈⇒无割点; 2度点⇒有2点割集)

定理11.20-21证明(要点)

- n(≥3)阶极大外平面图G

  所有顶点在外部面边界上

$\Rightarrow$ G有n-2个内部面 (归纳法)



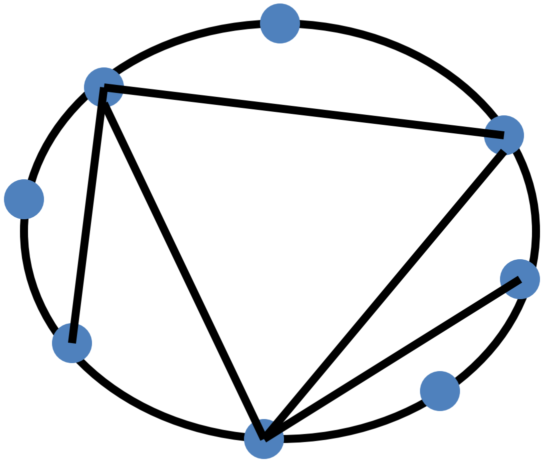
证明 用归纳法证明，$n=3$ 时，G 为 K_3，结论成立. 设 $n=k\geq 4$ 时结论成立，$n=K+1$ 时，由定理 11.19 容易证明 G 中存在 2 度顶点，设 v 为 G 中 2 度顶点，令 $G'=G-v$，则 G' 的内部面仍为 K_3，外部面的边界为长度为 $k+1-1=k$ 的圈，由定理 11.19 知 G' 是 k 阶极大外平面图，由归纳假设知 G' 有 $k-2$ 个内部面，于是 G 有 $k-2+1=k-1=k+1-1-1=n-2$ 个内部面. ∎

定理11.20-21证明(要点)

- n(≥3)阶极大外平面图G

  所有顶点在外部面边界上

⇒ **m=2n-3** (面的握手定理)



证明 (1) 由定理 11.19 和 11.20 可知，G 有$(n-2)$个次数为 3 的内部面，一个次数为 n 的外部面，由定理 11.2 知，

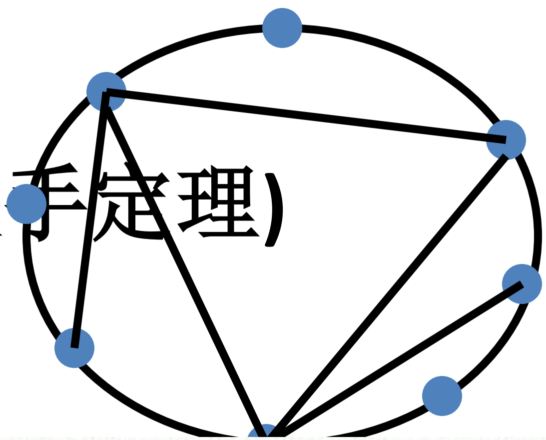
$$2m = \sum \deg(R_i) = 3 \cdot (n-2) + n = 4n - 6 \Rightarrow m = 2n - 3.$$

定理11.20-21证明(要点)

- **n(≥3)阶极大外平面图G**

  所有顶点在外部面边界上

⇒ 至少3个顶点度≤3 (m=2n-3,握手定理)



(2) 由定理 11.19 可知，$\forall\ v\in V(G), d(V)\geqslant 2$. 若 G 中至多有 2 上顶点的度数$\leqslant 3$，则 $(n-2)$个顶点的度数$\geqslant 4$，于是

$$2m=\sum \deg(R_i)\geqslant 4(n-2)+2\times 2 \Rightarrow m\geqslant 2n-2.$$

由(1)得

$$2n-3\geqslant 2n-2.$$

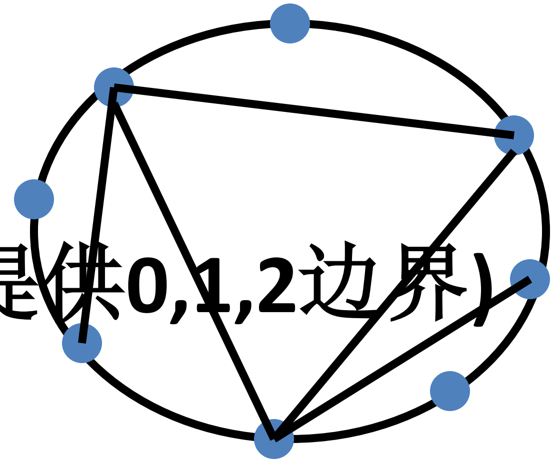
这是矛盾的.

定理11.20-21证明(要点)

- **n(≥3)阶极大外平面图G**

  所有顶点在外部面边界上

⇒ 至少**2**个顶点度**=2 (**内部面提供**0,1,2**边界**)**

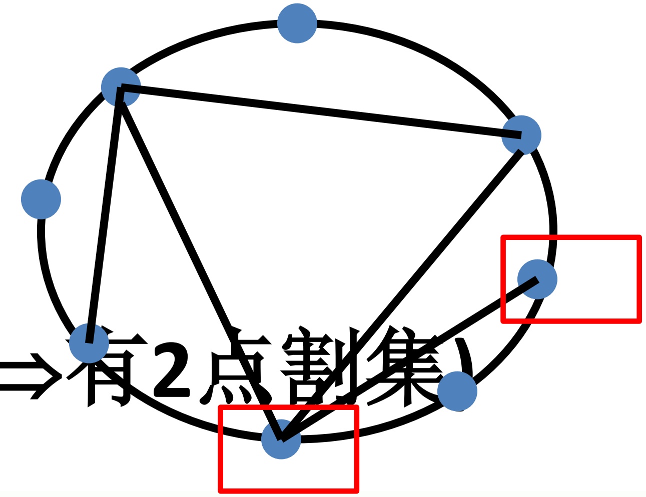


(3) 由定理 11.19 和 11.20 可知，在 G 中，长度为 n 的外部面的边界 C 包围 $n-2$ 个内部面，含 2 度顶点的内部面的边界与 C 有两条公共边而不含 2 度顶点的内部面的边界与 C 至多有一条公共边。若 G 中至多有一个 2 度顶点，则 C 的长度 $\leqslant 2+(n-2-1)=n-1$，这与 C 的长度为 n 是矛盾的。

定理11.20-21证明(要点)

- n(≥3)阶极大外平面图G

  所有顶点在外部面边界上



⇒ κ=2 (K$_3$; 圈⇒无割点; 2度点⇒有2点割集)

(4) 若 $n=3$，则 G 为 K_3，结论成立，即 $\kappa(G)=2$. 下面就 $n\geqslant4$ 讨论. 由定理 11.19 可知，G 中无割点，所以 $\kappa(G)\geqslant2$.

G 中存在度数大于等于 3 的顶点，否则 G 为长为 n 的圈，这与它是极大外平面图矛盾. 不妨设 v_n 是 G 中最大度数顶点之一，则 $d(v_n)\geqslant3$. 考虑 $G'=G-v_n$，则 G' 中存在路径 $v_1v_2\cdots v_{n-2}v_{n-1}$，则 v_n 与 $v_{i_1}=v_1,v_{i_2},\cdots,v_{i_{d(v_n)}}(=v_{n-1})$ 相邻，则 $G'-v_{i_2}$ 为非连通图，即 $\{v_n,v_{i_2}\}$ 为 G 的点割集，所以 $\kappa(G)\leqslant2$. 综上所述，$\kappa(G)=2$. ∎

单元10.4 平面哈密顿图

什么样的平面图一定是哈密顿图?

四面体图、六面体图、十二面体图都是哈密顿图

泰特猜想：3-连通3-正则平面图是哈密顿图?

内容提要

- 平面图与哈密顿图
  - Tait猜想的反例
  - 平面哈密顿图的充分条件
  - 平面哈密顿图的必要条件

Tait猜想

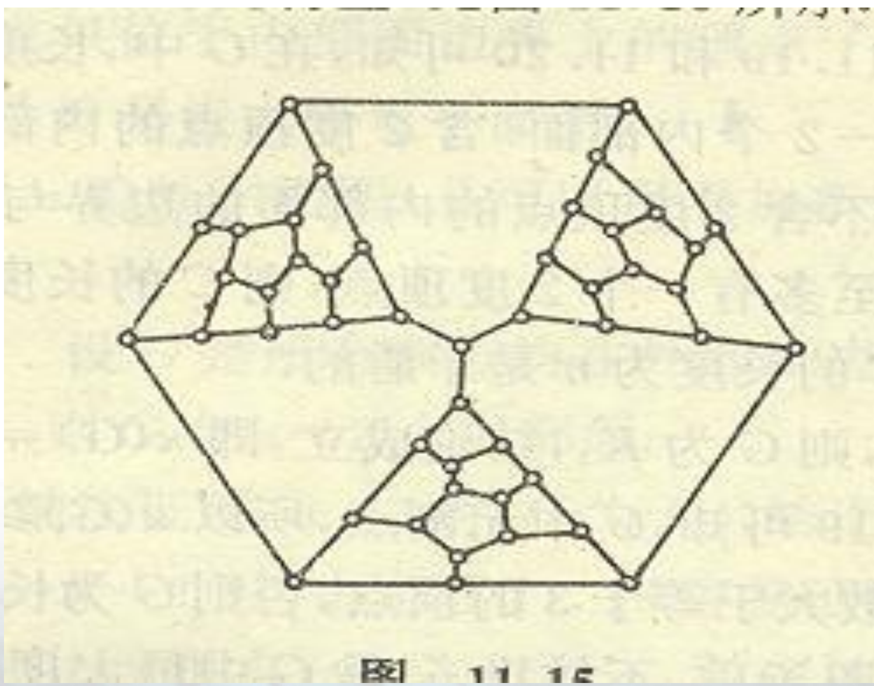
- **Tait猜想(1880):**

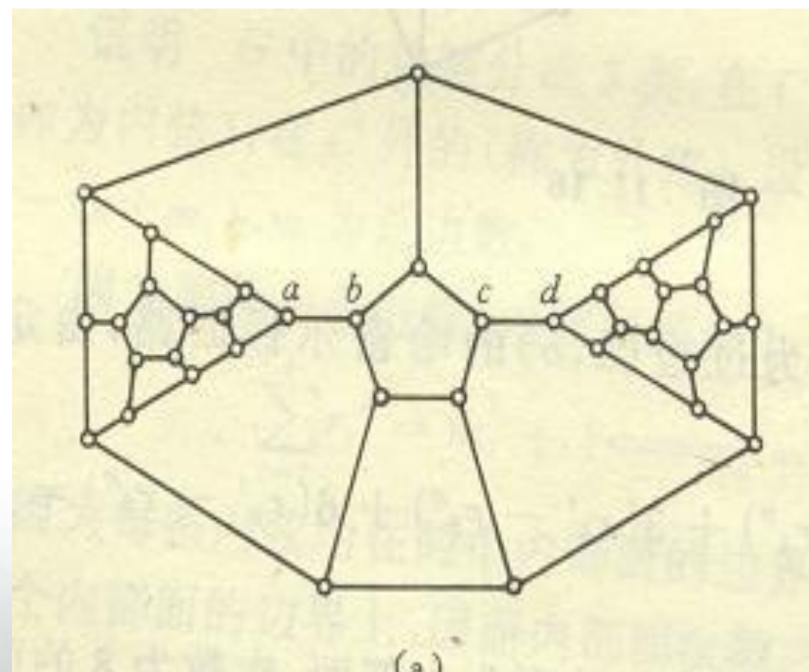
  3连通3正则平面图都是哈密顿图

- **4, 6, 12面体图验证；解决四色猜想**

Tait猜想的反例

- Tutte图(1946): 46阶反例(左图)
- Lederberg图(1967): 38阶反例(右图)





平面哈密顿图充分条件

- 定理(Tutte,1956):

  4连通平面图是哈密顿图. #

平面哈密顿图必要条件

- 定理11.23(Grinberg,1968):

  n阶简单平面哈密顿图, 哈密顿回路内(外)部次数为i的面数为$r_i'(r_i'')$ $\Rightarrow$

$$\sum_{i=3}^{n}(i-2)(r_i'-r_i'')=0.$$

定理11.23证明

- $\Sigma^n_{i=3}(i-2)(r_i'-r_i'')=0.$
- 证: 设哈密顿回路C内有m_1条边, 则

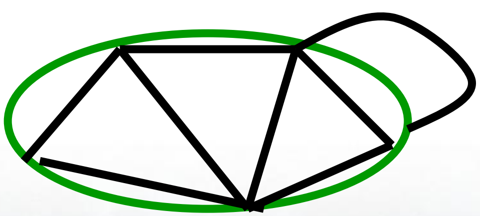
$$\Sigma^n_{i=3} r_i' = m_1+1.$$

$$\Sigma_{内部面}\deg(R_j) = \Sigma^n_{i=3} i r_i' = 2m_1+n,$$

以上两式整理，则

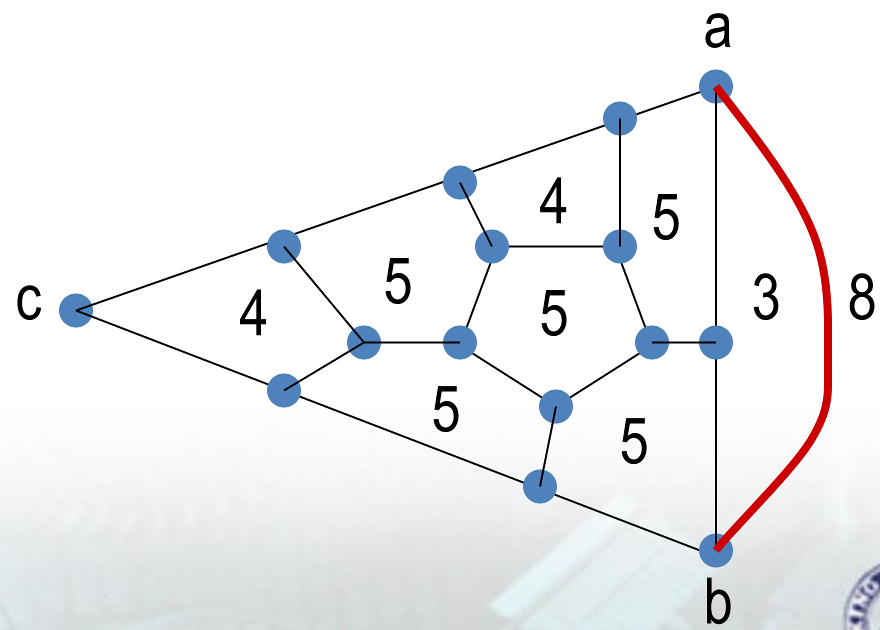
$$\Sigma^n_{i=3}(i-2)r_i'=n-2.$$

同理 $\Sigma^n_{i=3}(i-2)r_i''=n-2.$ #



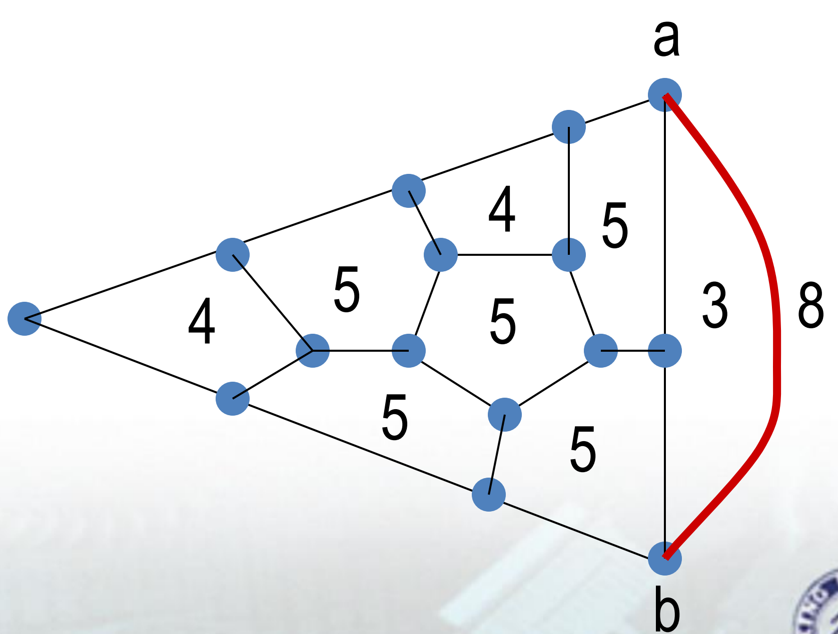
例11.5

- 下图中不存在过边(a,b)的哈密顿回路. (由此可证Tutte图和Lederberg图不是哈密顿图.) #



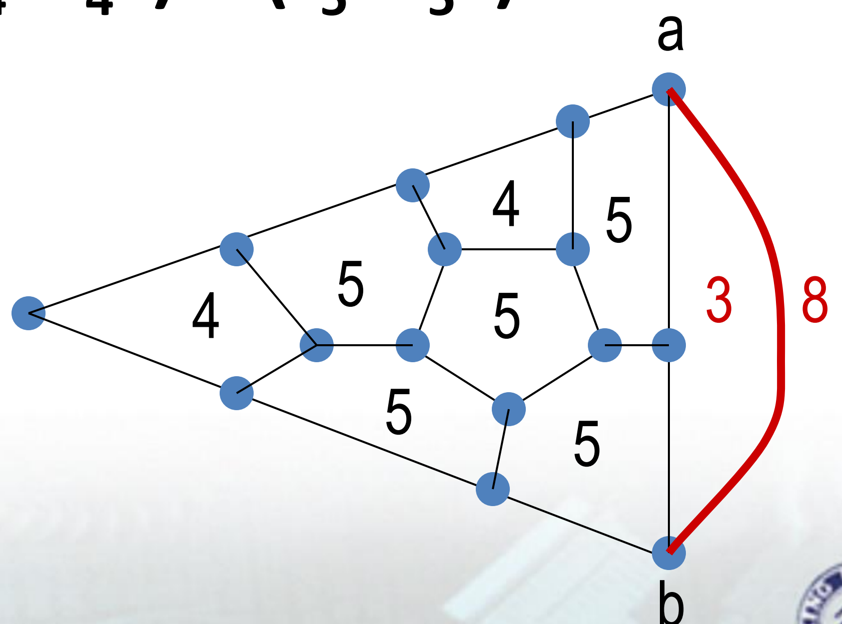
例11.5

- $\Sigma^{n}_{i=3}(i-2)(r_i'-r_i'')=0$ (定理11.23)
- $(r_3'-r_3'')+2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'')+6(r_8'-r_8'')=0$



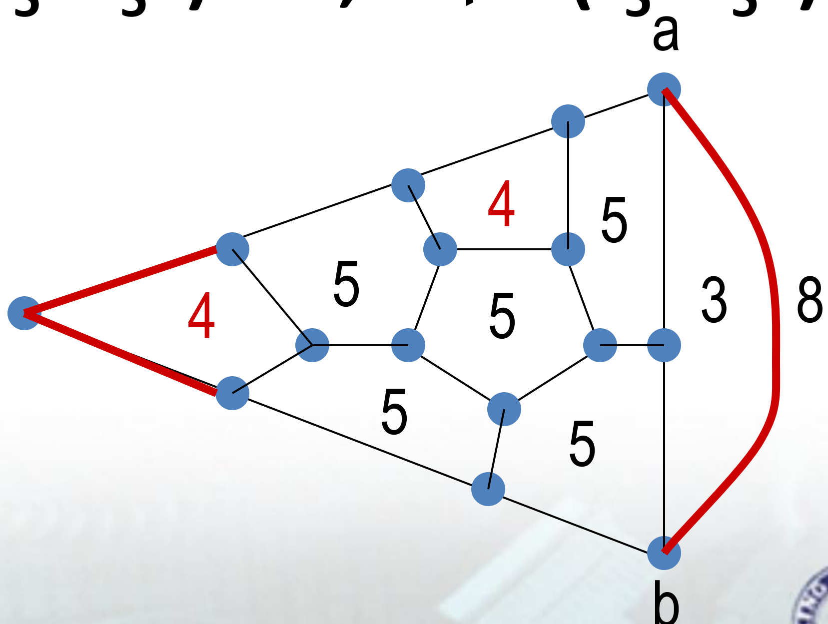
例11.5

- $(r_3'-r_3'')+2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'')+6(r_8'-r_8'')=0$
- $(1-0)+2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'')+6(0-1)=0$
- $2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'') = 5$



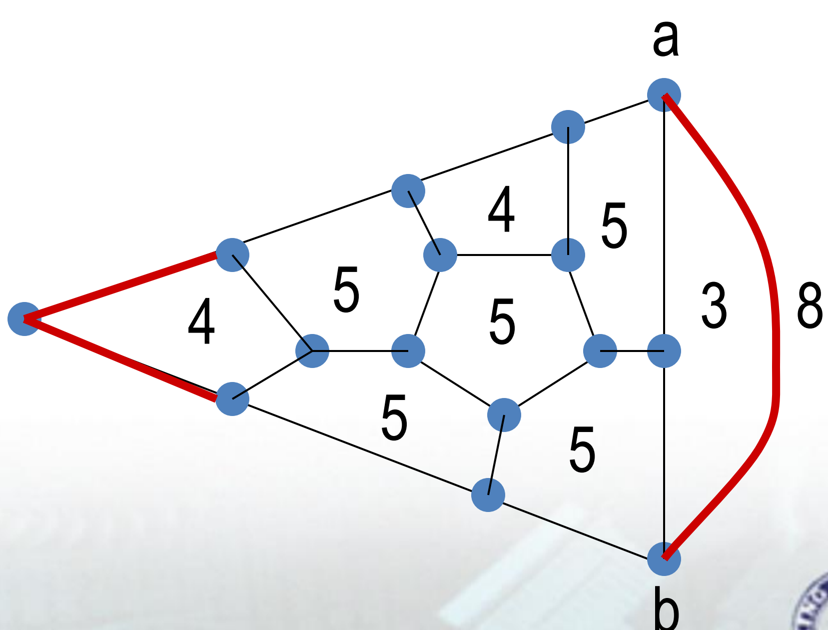
例11.5

- $2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'') = 5$
- $2(1 - 1)+3(r_5'-r_5'') = 5$, 即 $3(r_5'-r_5'') = 5$
- $2(2 - 0)+3(r_5'-r_5'') = 5$, 即 $3(r_5'-r_5'') = 1$



例11.5

- $3(r_5'-r_5'') = 5$ 或 1
- 上式不可能成立, 因为$(r_5'-r_5'')$是整数. #



总结

- **平面哈密顿图**
  - Tait猜想的反例
  - 平面哈密顿图的充分条件
  - 平面哈密顿图的必要条件

总结

- 平面图
  - 欧拉公式
  - 必要条件和充要条件
- 对偶图
- 外平面图

作业

- P179: 6，7, 12，16，18（选做）